6. Primitivas e Integrais

6.1 Primitivas

6.1 Em cada caso determine a primitiva $F(x)$ da função $f(x)$, satisfazendo a condição especificada.

(a) $f(x) = \sqrt[4]{x};\ F(1) = 2$ (b) $f(x) = x^2 + 1/x^2;\ F(1) = 0$ (c) $f(x) = (x+1)^{-1};\ F(0) = 2$

6.2 Determine a função f que satisfaz $f(1) = 1$ e que, para todo x em seu domínio, $f'(x) = xf(x)$. (sug.: qual a derivada da função $g(x) = \ln f(x)$?)

6.3 Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$ e suponha que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$. Se $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x),\ \forall x$, mostre que função $h(x) = [f(x) - \operatorname{sen} x]^2 + [g(x) - \cos x]^2$ tem derivada nula e, portanto, é constante. A partir daí deduza que $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$.

6.4 Para cada uma das funções $f(x)$ abaixo, calcule $\int f(x)\,dx$.

(a) $f = x^3 - 5x$ (b) $f = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ (c) $f = 2\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{x^5}$ (d) $f = \left(1 + x^2\right)^2$

(e) $f = \left(1 + x^2\right)^{-1}$ (f) $f = \operatorname{tg}^2 x - x\sqrt{1 + x^2}$ (g) $f = \sqrt{x} + \sec^2 x$ (h) $f = x^3\sqrt{x}$

(i) $f = 2^x + e^{x+1}$ (j) $f = 2 + x^2\cos\left(2x^3\right)$ (k) $f = \sec^2(4x + 2)$ (l) $f = \cos^2 x$

(m) $f = \sin^2 x + 2$ (n) $f = \sec(2x)\operatorname{tg}(2x)$ (o) $f = (x + 1)x^{-1}$ (p) $f = x(x + 1)^{-1}$

(q) $f = \dfrac{2x^2}{x^3 - 5}$ (r) $f = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 + 3\operatorname{sen}^2 x}$ (s) $f = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ (t) $f = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 + \cos x}}$

6.5 Calcule as integrais:

(a) $\int \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}dx$ (b) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ (sug.: faça a substituição $u = x/2$ e recorde-se do $\operatorname{arcsen} x$)

6.6 Determine a função f que satisfaz $f''(x) = x^2 + e^x,\ f(0) = 2$ e $f'(0) = 1$.

6.7 Se k é um número inteiro, calcule o valor de:

(a) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(kt)\,dt$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\operatorname{sen}(kt)\,dt$ (c) $\int_0^{\pi/4} [\cos^2(kt) - \operatorname{sen}^2(kt)]dt$.

6.8 Encontre a equação da curva que passa no ponto $A(-3,0)$ e cuja inclinação da reta tangente, em cada um de seus pontos (x,y), é $m(x) = 2x+1$.

6.9 Derivação sob o sinal de integral. Considere f uma função contínua em $[a,b]$ e suponha que $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sejam funções deriváveis em (a,b). Se

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt,$$

mostre que φ é derivável em (a,b) e $\varphi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$.

6.10 Usando o resultado do exercício precedente, calcule $\varphi'(x)$ em cada caso abaixo.

(a) $\varphi(x) = \int_1^x \sqrt[3]{1+t^4}dt$ (b) $\varphi(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} (\ln t)^5\,dt$ (c) $\varphi(x) = \int_{x^2-1}^{\exp x} \cos\left(t^2\right)dt$

6.11 Em cada caso abaixo, calcule a integral definida de f, no intervalo I indicado.

(a) $I = [-1,1]$; $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x<0 \\ x^2-x+1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$ (b) $I=[-2,2]$; $f(x) = |x-1|$

(c) $I=[-\pi,\pi]$; $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ (d) $I = [-\pi,\pi]$; $f(x) = x + |\cos x|$

(e) $I = [-3,5]$; $f(x) = \left|x^2-3x+2\right|$ (f) $I=[-\pi,\pi]$; $f(x) = x-|x|$

6.2 Cálculo de Áreas

6.12 Calcule a área delimitada

(a) pelas curvas $y = x^4$ e $y = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$;

(b) pelas curvas $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = x^3$, para $0 \leq x \leq 1$;

(c) pelas curvas $y = |x|$ e $y = -x^2$, para $-1 \leq x \leq 1$;

(d) pelas curvas $y = -x^2+4$ e $y = x^2$;

(e) pelo eixo y e pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, para $0 \leq x \leq \pi/4$;

(f) pelas retas $x=0$, $x=1$, $y=2$ e pela parábola $y=x^2$;

(g) pelas curvas $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$;

(h) pela curva $y=\sqrt{x}$ e pelas retas $y=x-2$ e $y=0$;

(i) pela curva $y = x^3-6x^2+8x$ e o eixo x;

(j) pelas parábolas $y=-x^2+6x$ e $y=x^2-2x$;

6.13 Em cada caso, esboce o gráfico da região $\mathcal{R}$ e calcule sua área.

(a) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2 \text{ e } x^2 \leq y \leq 4\}$;

(b) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ e } x^2 - x \leq y \leq -x^2 + 5x\}$;

(c) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1/y \text{ e } 1 \leq y \leq 2\}$;

(d) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$;

(e) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq |x|^3\}$.

6.14 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^3/4, \text{ para } x < 0 \\ x^2 - x - 2, \text{ para } 0 \leq x < 3 \\ 16 - 4x, \text{ para } x \geq 3. \end{cases}$$

Calcule $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$ e, também, a área entre o gráfico de f e o eixo x, de $x = -2$ até $x = 5$.

6.15 Em cada caso identifique a região do plano xy cuja área é representada pela integral e calcule o valor da área.

(a) $\int_0^1 dx$ (b) $\int_0^1 2x dx$ (c) $\int_{-1}^{0} (4 + 3x)\,dx$ (d) $\int_{-5}^{-3} (x+5)\,dx + \int_{-3}^{0} 2dx + \int_0^4 (2 - \sqrt{x})\,dx$

6.16 Suponha que $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ seja uma função par e que $g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ seja uma função ímpar. Mostre que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ e que $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$.

6.17 Seja $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ onde f é a função cujo gráfico encontra-se esboçado ao lado.

(a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.

(b) Em que intervalo a função g está crescendo?

(c) Quando g atinge seu valor máximo?

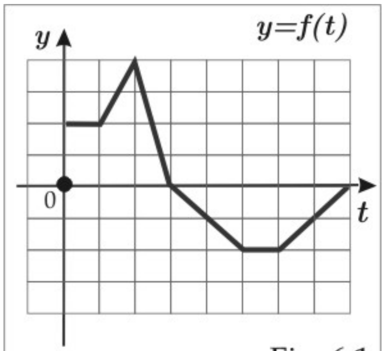

Fig. 6.1

6.18 Analise cada uma das integrais abaixo quanto à convergência.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ (b) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{dx}{(5-x)^2}$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^{-1/2} \exp(-\sqrt{x})\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x \exp\left(-x^2\right)dx$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ (f) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1+x}$ (g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x \exp\left(-x^2\right)dx$ (h) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^3 \exp\left(-x^4\right)dx$

6.3 Mudança de Variáveis

6.19 Calcule as seguintes integrais usando o Método de Substituição: $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$

(a) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+1}dx$ (b) $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\arctan x dx}{1+x^2}$ (d) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^3 x dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx$ (f) $\displaystyle\int \tan x dx$ (g) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x dx$ (h) $\displaystyle\int x\sqrt{2x^2+1}dx$

6.4 Integração por Partes

5.20 Calcule as seguintes integrais usando o Método de Integração por Partes: $\int u dv = uv - \int v du$

(a) $\displaystyle\int \ln x dx$ (b) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x dx$ (c) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x dx$ (d) $\displaystyle\int x^2 \cos x dx$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x dx$ (f) $\displaystyle\int x \ln x dx$ (g) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$ (h) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$

Respostas e Sugestões

6.1 a) $F(x) = \frac{4}{5}x^{5/4} + \frac{6}{5}$ b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3}$ c) $F(x) = \ln(x+1) + 2$ **6.2** $f(x) = \exp(\frac{x^2-1}{2})$

6.4 a) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + C$ b) $-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \ln x + C$ c) $-2\cos x - 1/4x^4 + C$ d) $\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$ e) $\operatorname{arctg} x + C$ f) $\operatorname{tg} x - x - \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2} + C$ g) $\frac{2}{3}x^{3/2} + \operatorname{tg} x + C$ h) $\frac{2}{9}x^{9/2} + C$ i) $\frac{2^x}{\ln 2} + e^{x+1} + C$ j) $2x + \frac{1}{6}\operatorname{sen}\left(2x^3\right) + C$ k) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}(4x+2) + C$ l) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + C$ m) $\frac{1}{2}\left(5x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + C$ n) $\frac{1}{2}\sec 2x + C$

o) $x + \ln|x| + C$ p) $x + 1 + \ln|x+1| + C$ q) $\frac{2}{3}\ln\left|x^3 - 5\right| + C$ r) $\frac{1}{3}\ln\left(1 + 3\operatorname{sen}^2 x\right) + C$ s) $2e^{\sqrt{x}} + C$

(t) $-2\sqrt{1+\cos x}$ **6.5** (a) $-\sqrt{4-x^2} + C$ (b) $\operatorname{arcsen}(x/2) + C$ **6.6** $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x + 1$ **6.7** (a) 0. (b) 0 (c) 0, se $k = 0$ e $\dfrac{\operatorname{sen} 2k\pi}{k}$, se $k \neq 0$. **6.8** $y = x^2 + x - 6$ **6.9** Se $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $\varphi(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$ e, usando a Regra da Cadeia, obtemos o resultado. **6.10** (a) $\varphi'(x) = \sqrt[3]{1+x^4}$ (b) $\varphi'(x) = [\ln(\operatorname{sen} x)]^5 \cos x + [\ln(\cos x)]^5 \operatorname{sen} x$ (c) $e^x \cos(e^{2x}) - 2x\cos(x^2-1)^2$ **6.11** (a) 1/3 (b) 5 (c) 4 (d) 4 (e) 43 (f) $-\pi^2$ **6.12** (a) 2/15 (b) 1/2 (c) 5/3 (d) $16\sqrt{2}/3$ (e) $\sqrt{2} - 1$ (f) 5/3 (g) 1/3 (h) 10/3 (i) 8 (j) 64/3 **6.13** (a) 16/3 (b) 9 (c) $\ln 2$ (d) 1/3 (e) 1/2 **6.14** $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \frac{3}{2}$; $A = 73/6$. Por que o valor da integral não coincidiu com o valor da área? **6.15** (a) 1 (b) 1 (c) 5/2 (d) 32/3 **6.16** Com a mudança $x = -t$ e observando que f é uma função par, encontramos: $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(t)\,dt$, e portanto: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ **6.17** (a) $g(0) = 0$, $g(1) = 2$, $g(2) = 5$, $g(3) = 7$ e $g(6) = 3$ (b) em $(0,3)$ (c) em $x = 3$ **6.18** (a) 4 (b) diverge (c) diverge (d) 1/2 (e) diverge (f) diverge (g) 1/4 **6.19** (a) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$ (b) $\frac{1}{5}\left(x^2+1\right)^{5/2} - \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}$ (c) $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$ (d) $-\frac{1}{4}\cos^4 x$ (e) $\frac{1}{2}(\ln x)^2$ (f) $-\ln|\cos x|$ (g) $\ln|\operatorname{sen} x|$ (h) $\frac{1}{6}\sqrt{2x^2-1}$ **6.20** (a) $x\ln x - x$ (b) $\operatorname{sen} x - x\cos x$ (c) $\left(2-x^2\right)\cos x + 2x\operatorname{sen} x$ (d) $\left(x^2-2\right)\operatorname{sen} x + 2x\cos x$ (e) $x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$ (g) 1 (h) 1.

Alerta! Nos exercícios 6.19 e 6.20 consideramos, por simplicidade, a constante C de integração igual a zero.