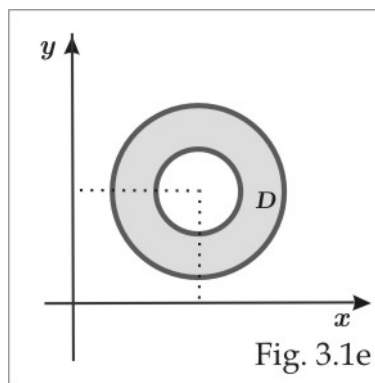
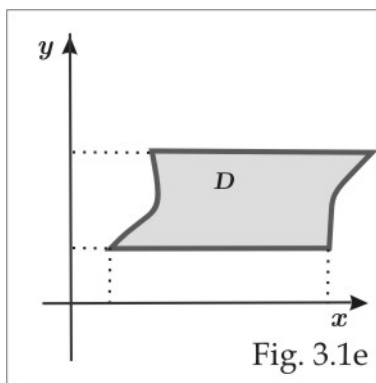
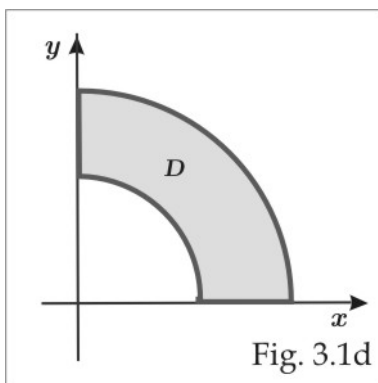
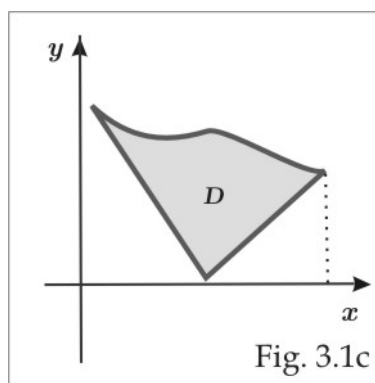
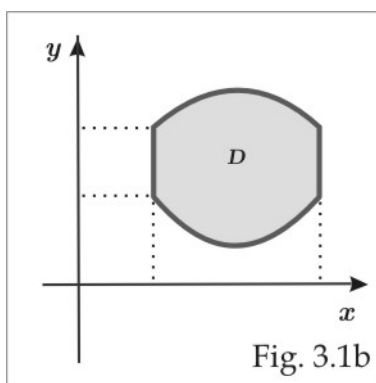
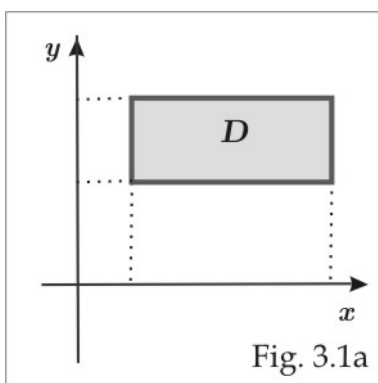


3. Integrais Múltiplas



3.1 Integrais Iteradas

3.1A Em cada caso abaixo, observe a região D e escreva a integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$ como uma integral iterada (repetida) de modo a obter o cálculo mais simples.



3.1B Calcule as seguintes integrais iteradas e em cada caso esboce a região de integração. Inverta a ordem de integração e compare o grau de dificuldade no cálculo da integral nas duas ordens.

(a) $\int_0^1 \int_0^{|x|} dy dx$ (b) $\int_0^\pi \int_0^x \cos(x^2) dy dx$ (c) $\int_0^3 \int_1^2 (12xy^2 - 8x^3) dy dx$
(d) $\int_1^3 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} xy dy dx$ (e) $\int_0^\pi \int_{-y}^y \text{sen } x dx dy$ (f) $\int_1^2 \int_0^1 (x - 3 \ln y) dx dy$

$$\begin{array}{lll}
\text{(g)} \int_0^1 \int_{x^2}^x e^{y/x} dy dx & \text{(h)} \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx & \text{(i)} \int_0^2 \int_1^3 |x-2| \operatorname{sen} y dx dy \\
\text{(j)} \int_0^\pi \int_{-1}^{\cos y} x \operatorname{sen} y dx dy & \text{(k)} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx & \text{(l)} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (x \cos y - y \cos x) dy dx \\
\text{(m)} \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} xy dy dx & \text{(n)} \int_0^1 \int_0^x x \operatorname{sen} y dy dx & \text{(o)} \int_0^2 \int_1^2 (2xy - y^3) dy dx \\
\text{(p)} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y dx dy & \text{(q)} \int_0^2 \int_1^{e^x} dy dx & \text{(r)} \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} xy dx dy \\
\text{(s)} \int_{-2}^1 \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy dx & \text{(t)} \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} xy dx dy & \text{(u)} \int_0^1 \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(x^3) dy dx
\end{array}$$

3.1C Em cada caso esboce a região D e calcule a integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$. Escolha a ordem de integração de modo a tornar o cálculo mais simples.

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} D : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 2; f = e^{y^2} & \text{(b)} D : 0 \leq y \leq 8, \sqrt[3]{y} \leq x \leq 2; f = xy \\
\text{(c)} D : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2; f = x^2 & \text{(d)} D : -1 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 4-x^2; f = 1
\end{array}$$

3.1D Em cada caso, esboce a região D e calcule a integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$. Utilize uma mudança de coordenadas, se necessário.

$$\begin{array}{l}
\text{(a)} D \text{ é a região triangular de vértices } (2, 9), (2, 1) \text{ e } (-2, 1); f = xy^2 \\
\text{(b)} D \text{ é a região retangular de vértices } (-1, -1), (2, -1), (2, 4) \text{ e } (-1, 4); f = 2x + y \\
\text{(c)} D \text{ é a região delimitada por } 8y = x^3, y = -x \text{ e } 4x + y = 9; f = x \\
\text{(d)} D \text{ é a região do } 1^\circ \text{ quadrante delimitada por } x^2 + y^2 = 1; f = \sqrt{1-x^2-y^2} \\
\text{(e)} D \text{ é a região triangular de vértices } (0, 0), (1, -1) \text{ e } (-1, 4); f = x^2 - y^2 \\
\text{(f)} D \text{ é a região delimitada por } y^2 = x, x = 0 \text{ e } y = 1; f = \exp(x/y) \\
\text{(g)} D \text{ é a região delimitada por } y = x^2/2, y = x; f = x(x^2 + y^2)^{-1} \\
\text{(h)} D \text{ é a região delimitada por } y = x, y = 0, x = 5 \text{ e } xy = 16; f = 1 \\
\text{(i)} D \text{ é a região delimitada por } y = e^x, y = \ln x, x + y = 1 \text{ e } x + y = 1 + e; f = 1 \\
\text{(j)} D \text{ é a região delimitada por } y = x^2, y = 0 \text{ e } x + y = 2; f = xy
\end{array}$$

3.1E Use coordenadas polares para calcular as seguintes integrais duplas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x dx dy & \text{(b)} \int_1^2 \int_0^x (x^2 + y^2)^{-1} dy dx \\
 \text{(c)} \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \exp(-x^2 - y^2) dy dx & \text{(d)} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA, D: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x \\
 \text{(e)} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y) dA & \text{(f)} \iint_D (x + y) dA, D: x^2 + y^2 - 2y \leq 0.
 \end{array}$$

3.1F Use a mudança de variável $u = x + y$ e $v = x - y$ e calcule a integral de $f(x, y) = (x + y)^2 \sin^2(x - y)$ sobre a região $D: |x| + |y| \leq \pi$.

3.1G A fronteira da região D é o paralelogramo de vértices $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, e $(1, 0)$. Use a mudança de variáveis do exercício precedente e calcule a integral dupla sobre D da função $f(x, y) = (x - y)^2 \cos^2(x + y)$.

3.1H Ainda com a mudança de variável do Exercício 5.6 calcule a integral dupla da função $f(x, y) = \sin\left(\frac{x - y}{x + y}\right)$ sobre a região D delimitada pelo quadrilátero de vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 0)$, e $(2, 0)$.

3.1I Use a mudança de variáveis $u = xy$, $y = v$ e calcule a integral dupla $\iint_D (x^2 + 2y^2) dA$, sendo D a região do plano xy delimitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = |x|$ e $y = 2x$.

3.1J Use a mudança de variáveis $x = u - v$, $y = 2u - v$ e calcule a integral dupla $\iint_D xy dA$, sendo D a região do plano xy delimitada pelas retas $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$.

3.1K Use a mudança de variáveis $u = \frac{1}{2}y$, $v = x - 2y$ e calcule a integral dupla da função $f(x, y) = \sqrt{x - 2y} + y^2/4$, sobre a região D do plano xy delimitada pelo triângulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 2)$.

3.1L Calcule a integral dupla de $f(x, y) = x^2$ sobre a região delimitada pela cardióide $r = 1 - \cos \theta$.

3.1M Use coordenadas polares e calcule a integral dupla $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$, sendo D a região do plano xy delimitada pelas curvas $y = \sqrt{2x - x^2}$ e $y = x$.

3.2 Áreas e Volumenes

3.2A Por integração dupla calcule a área de um círculo de raio R e da elipse de semi-eixos a e b .

3.2B Em cada caso calcule, por integral dupla, a área da região D do plano xy delimitada pelas curvas indicadas:

- (a) $D : x = 1, x = 2, y = -x^2$ e $y = 1/x^2$ (b) $D : x = 1, x = 4, y = -x$ e $y = \sqrt{x}$
 (c) $D : y = x^2$ e $y = 2/(1+x^2)$ (d) $D : y^2 = -x, x - y = 4, y = -1$ e $y = 2$
 (e) $D : y = 0, x + y = 3a, e y^2 = 4ax, a > 0$ (f) $D : y = e^x, y = \text{sen } x, x = \pi$ e $x = -\pi$.

3.2C Por integração dupla, calcule a área da região compreendida entre a cardióide $r = a(1 + \text{sen } \theta)$ e o círculo $r = a$.

3.2D Calcule a área da região delimitada pelas parábolas $x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x$ e $y^2 = 2x$. (sugestão: use a mudança $x^2 = yu$ e $y^2 = xv$)

3.2E Calcule a área da região delimitada pelas retas $y = x$, e $y = 0$ e pelos círculos $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4x$.

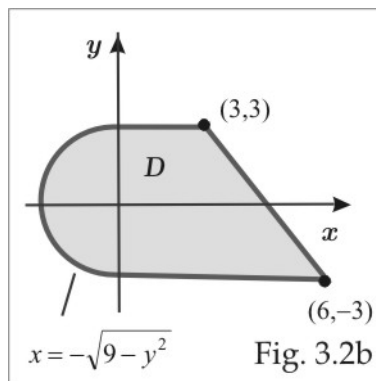
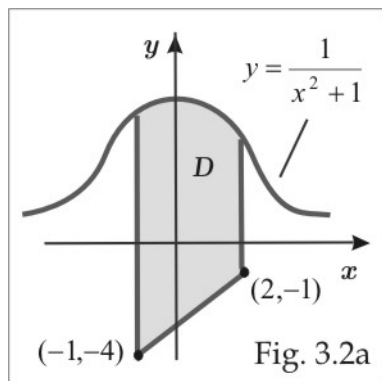
3.2F Identifique a região D do plano xy cuja área vem dada pela expressão:

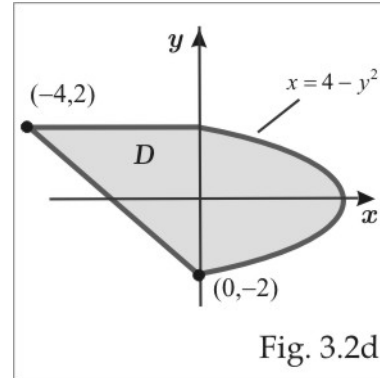
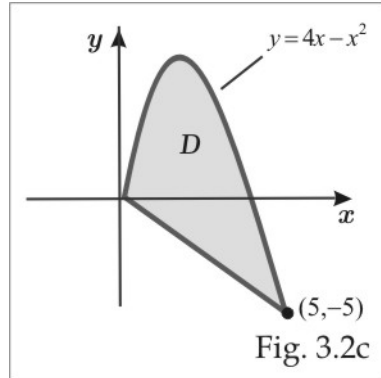
$$A(D) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} r dr d\theta$$

e calcule o valor da área.

3.2G Calcule a área da região delimitada pelas parábolas $y^2 = 10x + 25$ e $y^2 = -6x + 9$.

3.2H Use integral dupla e calcule a área da região D indicada na figura:

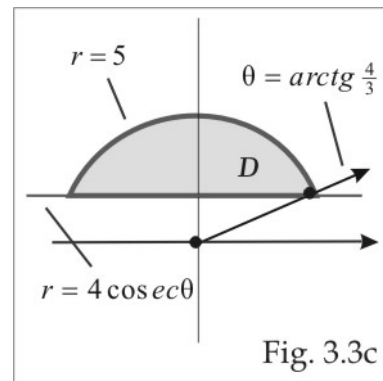
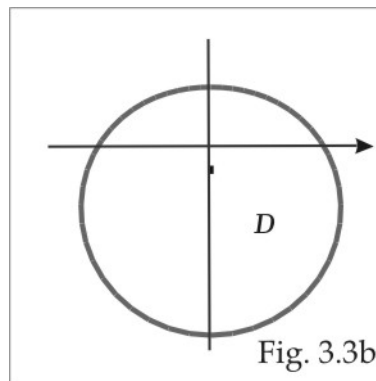
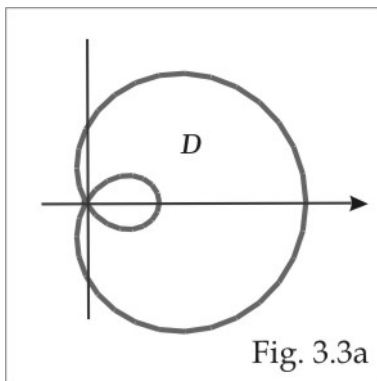




3.2I Calcule a área da região no primeiro quadrante delimitada pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = 8$ e pela curva $xy = 16$.

3.2J Por integral dupla, calcule a área de um laço da curva descrita em coordenadas polares pela equação $r^2 = 9 \cos 2\theta$.

3.2K Expresse a área da região D indicada como uma integral dupla iterada em coordenadas polares:



3.2L Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

3.2M A base de um sólido é a região do plano xy delimitada pelo disco $x^2 + y^2 \leq a^2$, $a > 0$, e a parte superior é a superfície do parabolóide $az = x^2 + y^2$. Calcule o volume do sólido.

3.2N Calcule o volume do sólido limitado inferiormente pelo plano xy , nas laterais pelas superfícies $y = 4 - x^2$ e $y = 3x$ e cuja parte superior jaz no plano $z = x + 4$.

3.2O Ao calcular o volume de um sólido Ω abaixo de um parabolóide e acima de uma certa região D do plano xy obteve-se a seguinte expressão:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Identifique a região D , expresse $\text{vol}(\Omega)$ por uma integral dupla iterada com a ordem invertida e, em seguida, calcule a integral.

3.2P Calcule o volume da região comum aos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

3.2Q Um sólido Ω no primeiro octante tem seu volume calculado pela expressão:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx.$$

Identifique o sólido e calcule o seu volume. Idem para:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x) dy dx.$$

3.2R Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$, $z = 0$ e $y = x$.

3.2S Calcule o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e pelo cone $x^2 + y^2 = z^2$.

3.2T Calcule o volume do sólido interior à esfera de centro na origem e raio $R = 5$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

3.2U Calcule o volume do sólido interior ao cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ e exterior ao parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

3.2V Calcule o volume do sólido limitado pelos planos $y = 1$ e $z = 0$, pelo parabolóide $x^2 + y^2 = z$ e pelo cilindro $y = x^2$.

3.2W Verifique que o parabolóide $x^2 + y^2 = z$ divide o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 4$, em dois sólidos de volumes iguais.

3.2X Calcule o volume da porção do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ cortada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

3.2Y Calcule o volume da região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e ao cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

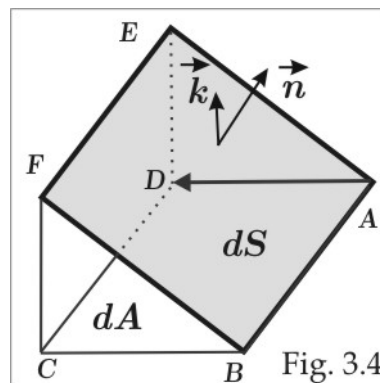
3.2Z Calcule o volume do sólido delimitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 = z$ e pelos planos $z = 0$, $z = 16$, $x = 1$ e $x = 3$.

Área de uma Superfície

Seja S uma superfície suave descrita por $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, e representemos por dS a *área elementar*, isto é, a porção da superfície S que jaz acima do retângulo elementar dA de área $dxdy$. Usaremos a integral dupla para calcular a área da superfície S . Primeiro aproximamos o dS pela porção do plano tangente acima do dA (projeção do dS) e em seguida integramos sobre a região D . Veja a figura 3.4 abaixo.

Representamos por γ o ângulo entre os vetores \vec{k} e \vec{n} , sendo \vec{n} a normal unitária exterior à superfície S . Temos que $\vec{n} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} - \vec{k}$ e, portanto, $\cos \gamma = (\vec{k} \cdot \vec{n}) / \|\vec{n}\| = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-1/2}$. Assim, $dS = dA \cos \gamma = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dxdy$ e teremos:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dxdy.$$



3.3 Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia

8.3A Calcule a massa de um disco de raio a , se a densidade no ponto (x, y) do disco é proporcional ao quadrado da distância a um ponto da circunferência.

8.3B Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isóceles com lados iguais de comprimento a . A densidade de massa por área em cada ponto da lâmina é diretamente proporcional ao quadrado da distância do ponto ao vértice oposto à hipotenusa. Determine o centro de massa da lâmina.

3.3C Determine a massa, o centro de massa e os momentos de inércia I_x , I_y da lâmina de densidade $\sigma(x, y)$ e formato D :

- (a) $D : y = \sqrt{x}, x = 9, y = 0; \sigma = x + y$ (b) $D : y = \sqrt[3]{x}, x = 8, y = 0; \sigma = y^2$
 (c) $D : y = x^2, y = 4; \sigma = ky$ (d) $D : x^2 + y^2 = 1; \sigma = |x|$

3.3D Uma lâmina tem a forma da região D do plano xy delimitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $x = 4$. Determine o centro de massa da lâmina, se a densidade de massa por área em cada ponto da lâmina é proporcional à distância do ponto ao eixo y .

3.3E Uma lâmina homogênea, isto é, com densidade constante, tem a forma de um quadrado de lado a . Determine o momento de inércia com relação a um lado, a uma diagonal e ao centro de massa.

3.4 Integrais Duplas Impróprias

As integrais duplas dos Exercícios 8.4A, 8.4B e 8.4C diferem daquelas tratadas até o momento em dois aspectos:

- (i) ou a região de integração D não é limitada;
 (ii) ou a função $f(x, y)$ que se deseja integrar é descontínua ou torna-se ilimitada na região

D . Nesses casos a integral dupla recebe a denominação de *integral imprópria*.

3.4A Calcule as seguintes integrais impróprias:

- (a) $\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (b) $\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ (c) $\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \sqrt{x^2+y^2} dxdy$
 (d) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}$ (e) $\int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x^2-y^2} dxdy$ (f) $\int \int_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$
 (g) $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$ (h) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}}$ (i) $\iint_D e^{x/y}; D : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1$

3.4B Use o resultado do Exercício 5.45(g) e deduza que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

3.4C Mostre que a função $f(x, y) = 1/(x - y)$ não é integrável em $D : 0 \leq y < x \leq 1$, embora seja contínua neste conjunto. Este exemplo mostra que *não basta ser contínua para ser integrável*.

3.5 Integral Tripla

O cálculo de integrais triplas se reduz ao cálculo de uma integral dupla seguida de uma integral simples e, dependendo da região de integração, a integral pode ser calculada de forma iterada como três integrais simples. A seguir mostra-se algumas situações para o cálculo da integral $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$.

$$(a) \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D \text{ e } \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$

Nesse caso D é a projeção no plano xy da região de integração Ω e o cálculo da integral tripla se reduz a:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA.$$

$$(b) \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \text{ e } p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}.$$

Nesse caso a integral tripla é calculada como uma integral iterada:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{p(x, y)}^{q(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx.$$

Naturalmente, uma mudança na descrição da região Ω acarretará inversões na ordem de integração.

3.5A Expresse a integral tripla $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$ como uma integral iterada e, em seguida, calcule o seu valor no caso em que $f(x, y, z) = xyz$ e a região Ω é descrita por:

$$(a) -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2 \quad (b) -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - y$$

$$(c) 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x + y \quad (d) 0 \leq x \leq z^2, x - z \leq y \leq x + z, 1 \leq z \leq 2.$$

3.5B Escreva cada uma das integrais abaixo na ordem $dzdydx$:

$$(a) \int_0^1 \int_1^3 \int_4^5 f(x, y, z) dx dy dz \quad (b) \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz dx dy$$

$$(c) \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{\sqrt{(z-1)^2-y^2}} f(x, y, z) dx dy dz \quad (d) \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} f(x, y, z) dx dy dz$$

3.5C Descreva o sólido Ω do \mathbb{R}^3 , cujo volume é:

$$(a) \int_0^1 \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_2^3 dx dy dz \quad (b) \int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} \int_0^{4-x} dy dx dz \quad (c) \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dz dy dx$$

$$(d) \int_0^1 \int_0^{3x} \int_0^1 dz dy dx \quad (e) \int_1^2 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy dx dz \quad (f) \int_1^4 \int_{-z}^z \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx dy dz$$

3.5D Em cada caso identifique o sólido Ω e calcule seu volume por integração tripla.

- (a) Ω é delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0$;
- (b) Ω é delimitado pelo cilindro $z = 1 - y^2$ e pelos planos $x = z$, $x = 0$ e $y = 0$;
- (c) Ω é delimitado pelos cilindros $z = 3x^2$ e $z = 4 - x^2$ e pelos planos $y + z = 6$ e $y = 0$;
- (d) Ω é a interseção dos parabolóides $z \leq 1 - x^2 - y^2$ e $z \geq x^2 + y^2 - 1$;
- (e) Ω é delimitado pelos cilindros $x = y^2$ e $y^2 = 2 - x$ e pelos planos $z = 5 + x + y$ e $z = 0$;
- (f) Ω é a interseção da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$ com o parabolóide $z \geq x^2 + y^2$;
- (g) Ω é delimitado pelo plano xy e pelas superfícies $x^2 + y^2 = 2x$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.5E Em cada caso calcule o volume do sólido descrito pelas desigualdades.

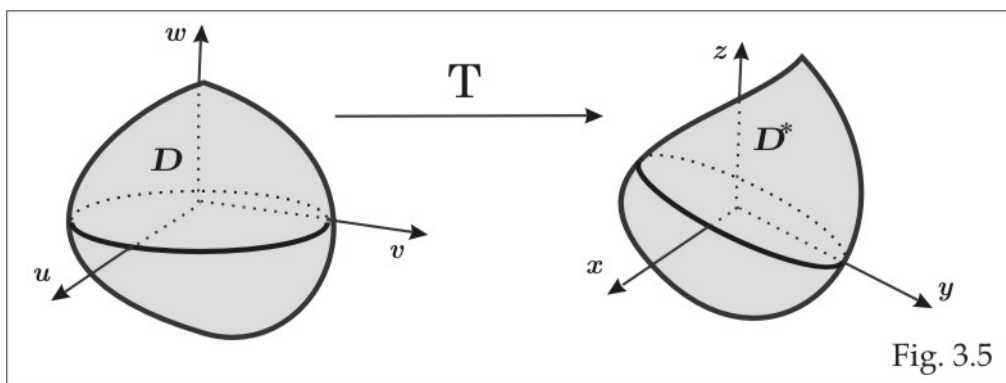
- (a) $0 \leq x \leq z \leq 1 - y^2$ (b) $x^2 + 4y^2 \leq 4$ e $x + y \leq z \leq x + y + 1$ (c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2$
 (d) $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$ (e) $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$ (f) $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

3.6 Mudança de Coordenadas

Consideremos uma transformação (mudança de coordenadas) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com jacobiano diferente de zero:

$$T : \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad \text{com } J(T) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0.$$

Representemos por D^* a imagem da região D pela transformação T , como sugere a figura abaixo.



Temos a seguinte fórmula de mudança de coordenadas em integral tripla:

$$\iiint_{\Omega^*} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J(T)| \, du \, dv \, dw$$

Consideremos dois casos especiais:

(a) Coordenadas Cilíndricas

Nesse caso a transformação T é definida por: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e $z = z$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, com jacobiano $J = r$. Assim, a fórmula de mudança de coordenadas fica:

$$\iiint_{T(\Omega)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

(b) Coordenadas Esféricas

Nesse caso a transformação T é definida por: $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$ e $z = \rho \cos \varphi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, com jacobiano $|J| = \rho^2 \sin \varphi$. Assim, a fórmula de mudança de coordenadas fica:

$$\iiint_{T(\Omega)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi dr d\theta dz$$

3.6A Calcule o volume do sólido delimitado por uma esfera de raio R . Calcule a integral tripla de duas maneiras: primeiro use coordenadas cilíndricas e, depois, coordenadas esféricas.

3.6B Calcule o volume do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$. (veja o Exercício 7.17)

3.6C Use coordenadas cilíndricas e calcule as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz dx dy & \text{(b)} \quad & \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} (x^2+y^2) dz dy dx \\ \text{(c)} \quad & \iiint_{\Omega} xy dV; \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 & \text{(d)} \quad & \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^1 x dz dy dx \end{aligned}$$

3.6D Use coordenadas esféricas e calcule as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx \\ \text{(b)} \quad & \int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy. \end{aligned}$$

3.6E Usando uma mudança de coordenadas adequada, calcule o volume do sólido Ω nos seguintes casos:

- (a) Ω é delimitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 = az$, pelo plano $z = 0$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$;
- (b) Ω é delimitado pelos parabolóides $x^2 + y^2 = z$ e $x^2 + y^2 + 1 = 2z$;
- (c) Ω é delimitado acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ e abaixo pelo parabolóide $x^2 + y^2 = az$, $a > 0$;
- (d) Ω é a intersecção da bola $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ com o cone $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z \geq 0$;
- (e) Ω é delimitado pelo parabolóide $-2(x^2 + y^2) = z$ e pelo plano $z = -4$;
- (f) Ω é interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$, limitado superiormente pelo cone $x^2 + z^2 = y^2$;
- (g) Ω é interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e exterior ao cone $x^2 + y^2 = z^2$;
- (h) Ω é a calota intersecção da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ com o semi-espaço $z \geq a$, $0 < a < R$;
- (i) Ω é a intersecção da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 < a < R$.

3.6F Faz-se um orifício circular em uma esfera, o eixo do orifício coincidindo com o eixo da esfera. O volume do sólido resultante vem dado por:

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz d\theta$$

Por observação da integral determine o raio do orifício e o raio da esfera. Calcule o valor de V .

3.7 Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia

Consideremos um sólido Ω cuja *densidade volumétrica* é representada pela função $\sigma(x, y, z)$. Quando a densidade for a mesma em cada ponto do sólido, este será denominado *sólido homogêneo*. Por definição, a densidade é igual a massa por unidade de volume e, denotando a massa e o volume de Ω , respectivamente por m e V , temos a seguinte fórmula: $\sigma = \frac{m}{V}$. Como ocorreu com a integral dupla, se a função $f(x, y, z)$ for identificada com a densidade do sólido Ω , então a integral tripla $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$ será interpretada como a massa de Ω . De fato essa interpretação segue integrando sobre Ω a relação $dm = \sigma dV$.

Procedendo como no caso bidimensional, em que o objeto foi interpretado como uma lâmina plana, para um sólido Ω as coordenadas do *centro de massa* são calculadas pelas fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} x \sigma dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} y \sigma dV \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} z \sigma dV$$

e o momento de inércia em relação a um eixo L é calculado por:

$$I_L = \iiint_{\Omega} \sigma(x, y, z) \delta^2 dV,$$

sendo $\delta = \delta(x, y, z)$ a distância do ponto $P(x, y, z)$ do sólido Ω ao eixo L . No caso em que o eixo L é o eixo coordenado x , y ou z , deduz-se facilmente as seguintes fórmulas para os momentos de inércia I_x , I_y e I_z :

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \sigma dV, \quad I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \sigma dV \quad \text{e} \quad I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \sigma dV.$$

3.7A Calcule a massa de uma bola de raio R , se densidade de massa é diretamente proporcional à distância r ao centro da esfera. Qual seria a massa da bola, se a densidade fosse inversamente proporcional à r ?

3.7B Determine a massa do sólido delimitado pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 4$, se a densidade em um ponto P do cone é proporcional à distância do ponto P ao eixo z .

3.7C Calcule a massa do sólido cortado da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, se a densidade no ponto P é proporcional à distância de P ao plano xy .

3.7D Para uma altitude z de dez mil metros, a densidade σ (em kg/m^3) da atmosfera terrestre é aproximada por $\sigma = 1.2 - (1.05 \times 10^{-4})z + (2.6 \times 10^{-9})z^2$. Estime a massa de uma coluna de ar de 10 quilômetros de altura com base circular de 3 metros de raio.

3.7E Determine o centro de massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$, se a densidade volumétrica é $\sigma = kz$.

3.7F Calcule o momento de inércia em relação ao seu eixo de um cilindro circular reto de altura H e raio R , se a densidade σ no ponto (x, y, z) é $\sigma(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

3.7G Mostre que o *centróide*¹ do hemisfério $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ é o ponto $C(0, 0, 3R/8)$.

3.7H Um sólido tem a forma da região interna ao cilindro $r = a$, interior à esfera $r^2 + z^2 = 4a^2$ e acima do plano xy . A densidade em um ponto P do sólido é proporcional à sua distância ao plano xy . Calcule a massa e o momento de inércia I_z do sólido.

¹centróide é a denominação dada ao centro de massa de um sólido homogêneo com densidade $\sigma = 1$.

3.7I Um sólido esférico de raio a tem densidade em cada ponto proporcional à distância do ponto a uma reta fixa L que passa pelo seu centro. Calcule a massa do sólido.

3.7J Calcule o volume e o centróide do sólido delimitado acima pela esfera $\rho = a$ e abaixo pelo cone $\varphi = \beta$, $0 < \beta < \pi/2$.

Respostas & Sugestões

Exercícios 3.1

3.1A Recorde-se que a ordem de integração $dydx$ é adequada à regiões do tipo $D : a \leq x \leq b; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$ **3.1B** (a) $1/2$ (b) $\frac{1}{2} \sin \pi^2$ (c) -36 (d) 1 (e) 0 (f) $\frac{5}{2} - 6\sqrt{2}$ (g) $\frac{e}{2} - 1$ (h) $\frac{e-1}{2}$ (i) $1 - \cos 2$ (j) $-\frac{2}{3}$ (k) $\frac{1}{3}$ (l) 0 (m) xx (n) $\frac{3}{2} - \sin 1 - \cos 1$ (o) $-\frac{3}{2}$ (p) $\frac{8}{3}$ (q) $e^2 - 1$ (r) $\frac{1}{16}$ (s) $\frac{9}{2}$ (t) $-\frac{8}{3}$ (u) $\frac{1}{3}(1 - \cos 1)$ **3.1C** (a) $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$ (b) 16 (c) $\frac{3\pi}{8}$ (d) $9 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}$ **3.1D** (a) $\frac{1504}{5}$ (b) $\frac{75}{2}$ (c) $\frac{209}{30}$ (d) $\frac{\pi}{6}$ (e) -3 (f) $\frac{1}{2}$ (g) $\ln 2$ (h) $8 + 16 \ln \frac{5}{4}$ (i) $\frac{1}{2}e^2 + e - 3$ (j) $\frac{7}{24}$ **3.1E** (a) 0 (b) $\frac{\pi}{4} \ln 2$ (c) $\frac{\pi}{2}[1 - \exp(-a^2)]$ (d) $\frac{9}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$ (e) $\frac{\pi}{4}$ (f) $\frac{3\pi}{8}$ **3.1F** $\pi^4/3$ **3.1G** $\frac{1}{3} + \frac{\sin 6 - \sin 2}{12}$ **3.1H** $3 - 3 \cos 1$ $5.9 \frac{15}{8}$ **3.1J** 7 **3.1K** $74/15$ **3.1L** $49\pi/32$ **3.1M.** $\frac{1}{9}(16 - 10\sqrt{2})$.

Exercícios 3.2

3.2A πR^2 e πab **3.2B** (a) $\frac{17}{6}$ (b) $\frac{73}{6}$ (c) $\pi - \frac{2}{3}$ (d) $\frac{33}{2}$ (e) $\frac{10a^2}{3}$ (f) $e^\pi - e^{-\pi}$ **3.2C** $2a^2 + \frac{\pi a^2}{4}$ **3.2D** $\frac{1}{3}$ **3.2E** $\frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$ **3.2F** $2 + \pi/4$ **3.2G** $\frac{16\sqrt{15}}{3}$ **3.2H** (a) $\frac{\pi}{4} + \frac{15}{2} + \arctg 2$ (b) $\frac{9\pi}{2} + 27$ (c) $\frac{125}{6}$ (d) $\frac{56}{3}$ **3.2I** $8 + 16 \ln 2$ **3.2J** $9/2$ **3.2K** (a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{1+2\cos\theta} r dr d\theta$ (b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{3-\sin\theta} r dr d\theta$ (c) $2 \int_{\arctg 4/3}^{\pi/2} \int_4^5 \operatorname{cosec} \theta r dr d\theta$ **3.2L** $\frac{1}{6}$ **3.2M** $\frac{\pi a^3}{2}$ **3.2N** $\frac{625}{12}$ **3.2O** $\frac{5}{6}$ **3.2P** $16a^3/3$ **3.2Q** $\frac{1}{6} e^{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}}$ **3.2R** $\frac{1}{3}$ **3.2S** $\frac{64}{9}$ **3.2T** $\frac{256\pi}{3}$ **3.2U** $\frac{2}{3}$ **3.2V** $\frac{88}{105}$ **3.2W** $\frac{\pi}{3}(64 - 24\sqrt{3})$ **3.2X** $\frac{128}{9}(3\pi - 4)$ **3.2Z** $480\sqrt{15}$.

Exercícios 3.3

3.3A $3k\pi a^4/2$ **3.3B** $C_M(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5})$ **3.3C** (a) $M = \frac{2349}{20}; C_M(6.35, 0.41); I_x = 269,04; I_y = 5194,13$ (b) $M = \frac{32}{3}; C_M(8/3, 12/7); I_x = 32 I_y = \frac{1024}{9}$ (c) $M = \frac{128k}{5}; C_M(0, 5/7); I_x = 512k/7; I_y = 512k/21$ (d) $M = \frac{4}{3}; C_M(0, 0); I_x = \frac{4}{15}; I_y = 2/3$ **3.3D** $C_M(\frac{20}{7}, 0)$ **3.3E** $I_L = \sigma a^4/3; I_D = \sigma a^5/6$ e $I_O = 2\sigma a^4/3$.

Exercícios 3.4

3.4A (a) 2π (b) 2π (c) $-\pi$ (d) 4 (e) $\frac{\pi}{8}$ (f) ∞ (g) π (h) $8/3$ (i) $1/2$.

Exercícios 3.5

3.5A (a) $\frac{7}{8}$ (b) 0 (c) $\frac{671}{4320}$ (d) $\frac{1022}{27}$ **3.5D** (a) $\frac{256}{15}$ (b) $\frac{4}{15}$ (c) $\frac{304}{15}$ (d) π (e) $\frac{32}{3}$ (f) $2\pi(2\sqrt{6} - \frac{11}{3})$ (g) $\frac{32}{9}$ **3.5E** (a) $\frac{8}{15}$ (b) $\frac{64}{9} - \frac{3\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ (d) 2π .

Exercícios 3.6

3.6A $\frac{4}{3}\pi R^3$ **3.6B** $\frac{4}{3}\pi abc$ **3.6C** (a) $\frac{7\pi}{16}$ (b) $\frac{10\pi}{3}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{3}$ **3.6D** (a) $\frac{256\pi}{5}(\sqrt{2} - \frac{1}{2})$ (b) $\frac{\pi R^4}{16}$ **3.6E** (a) $\frac{3\pi a^3}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{4\pi a^3}{3}(\sqrt{2} - \frac{7}{8})$ (d) π (e) 4π (f) $\frac{8\pi}{3}$ (g) $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ (h) $\frac{\pi}{3}(2R^3 + a^3) - \pi R^2 a$ (i) $\frac{4\pi}{3}[R^3 - (R^2 - a^2)^{3/2}]$ **3.6F** $r = 1$; $R = 2$ e $V = 4\pi\sqrt{3}$.

Exercícios 3.7

3.7A $k\pi R^4$ e $2k\pi R^2$ **3.7B** $\frac{128k\pi}{3}$ **3.7C** $\frac{29k\pi}{32}$ **3.7D** $M \simeq 108 \times 10^{-6}$ **3.7E** $C_M(0, 0, \frac{8R}{15})$
3.7F $\frac{2k\pi}{5}HR^5$ **3.7G** $C_M(0, 0, \frac{3R}{8})$ **3.7H** $\frac{5k\pi}{6}a^6$ **3.7I** Considerando uma mudança de base, se necessário, não há perda de generalidade em admitir que tal reta L é o eixo z . Nesse caso, $\sigma = k\sqrt{x^2 + y^2}$ e, portanto:

$$Massa = k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho^3 (\text{sen } \varphi)^2 d\rho d\varphi d\theta = \frac{k\pi^2 a^4}{4}.$$

3.7J $vol(\Omega) = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos \beta)$.