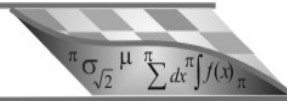


## 4. Derivadas



### 4.1 Funções Deriváveis

**4.1A** Em cada caso, encontre a derivada da função  $y = f(x)$ , usando a definição.

(a)  $y = x^2 + 1$  (b)  $y = 2x^3$  (c)  $y = x^2 - 5$  (d)  $y = 2x^2 - 3x$  (e)  $y = \frac{1}{x+1}$

**4.1B** Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{para } x \leq 0 \\ 2, & \text{para } x > 0 \end{cases}$ .

(a) Calcule  $f'(-1)$  (b) Existem as derivadas  $f'_+(0)$  e  $f'_-(0)$ ? (c)  $f$  é derivável em  $x = 0$ ?

**4.1C** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = |x| + x$ .

(a) Existe  $f'(0)$ ? (b) Existe  $f'(x)$  para  $x \neq 0$ ? (c) Como se define a função  $f'$ ?

**4.1D** Investigue a derivabilidade da função dada no ponto indicado.

(a)  $x = 0$ ;  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 0 \\ x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$  (b)  $x = 1$ ;  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2x - 1, & \text{se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

(c)  $x = 1$ ;  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}(x+1), & \text{se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$  (d)  $x = 0$ ;  $f(x) = |x|$

**4.1E** Existe algum ponto no qual a função  $y = |x^2 - 4x|$  não é derivável? Por quê?

**4.1F** Seja  $f$  uma função derivável em  $x = 1$  tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 5$ . Calcule  $f(1)$  e  $f'(1)$ .

**4.1G** Suponha que  $f$  seja uma função derivável em  $\mathbb{R}$ , satisfazendo  $f(a+b) = f(a) + f(b) + 5ab$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . Se  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 3$ , determine  $f(0)$  e  $f'(x)$ .

**4.1H** Calcule  $a$  e  $b$ , de modo que a função  $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ ax + b, & \text{se } x > 1 \end{cases}$  seja derivável em  $x = 1$ .

**4.1I** Em cada caso, determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de  $f$ , no ponto cuja abscissa é fornecida.

(a)  $f(x) = x^{2/3}$ ,  $x = 8$    (b)  $f(x) = x^{-3/4}$ ,  $x = 16$    (c)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x = 3$ .

**4.1J** Determine a equação da reta tangente à parábola  $y = x^2$ , com inclinação  $m = -8$ . Faça um gráfico ilustrando a situação.

**4.1K** Determine a equação da reta normal à curva  $y = -x^3/6$ , com inclinação  $m = 8/9$ .

**4.1L** Se  $y = f(x)$  é a função definida por  $y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & \text{se } x \geq 2 \\ -\sqrt{2-x}, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$ , encontre as equações

das retas tangente e normal ao gráfico de  $f$ , no ponto de abscissa  $x = 2$ .

**4.1M** Determine a equação da reta que tangencia o gráfico da função  $y = x^2$  e é paralela à reta  $y = 4x + 2$ .

**4.1N** Verifique que a reta tangente ao gráfico da função  $f(x) = 1/x$ , no ponto de abscissa  $x = a$ , intercepta o eixo  $x$  no ponto  $A(2a, 0)$ .

**4.1O** Determine as retas horizontais que são tangentes ao gráfico da função  $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 1$ .

**4.1P** Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ .

(a) Esboce o gráfico de  $f$    (b)  $f$  é contínua em  $x = 1$ ?   (c)  $f$  é derivável em  $x = 1$ ?

**4.1Q** Repita o exercício precedente, considerando agora  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ .

**4.1R** Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = x|x|$ .

(a) Determine  $f'(x)$ , para  $x \neq 0$ .   (b) Existe  $f'(0)$ ?   (c) Esboce o gráfico de  $f$  e o de  $f'$ .

## 4.0 Regras Básicas de Derivação

**4.2A** Se  $y = x^2 - \sqrt{1+u^2}$  e  $u = \frac{x+1}{x-1}$ , calcule  $\frac{dy}{dx}$ .

**4.2B** Se  $y = \frac{x+1}{x-1}$ , verifique que  $(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \frac{dy}{dx}$ .

**4.2C** Suponha que  $x = x(t)$  seja uma função derivável em  $\mathbb{R}$ . Se  $y = \frac{1}{x^2+1}$ , verifique que,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , tem-se  $\frac{dy}{dt} = -2xy^2 \frac{dx}{dt}$ .

**4.2D** Suponha que  $x = x(t)$  seja uma função derivável até a segunda ordem. Se  $y = x^3$ , verifique que  $\frac{d^2y}{dt^2} = 6x \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 3x^2 \frac{d^2x}{dt^2}$ .

**4.2E** Sabendo-se que  $g(-1) = 2$ ,  $f(2) = -3$ ,  $g'(-1) = -1/3$  e  $f'(2) = 6$ , determine as equações das retas tangente e normal à curva  $h(x) = f(g(x))$ , em  $x = -1$ .

**4.2F** Se  $h(x) = [f(x)]^3 + f(x^3)$ , calcule  $h'(2)$ , sabendo que  $f(2) = 1$ ,  $f'(2) = 7$  e que  $f'(8) = -3$ .

**4.2G** Use a Regra da Cadeia para mostrar que a derivada de uma função par é uma função ímpar e que a derivada de uma função ímpar é uma função par.

**4.2H** Calcule a derivada de primeira ordem de cada uma das funções abaixo.

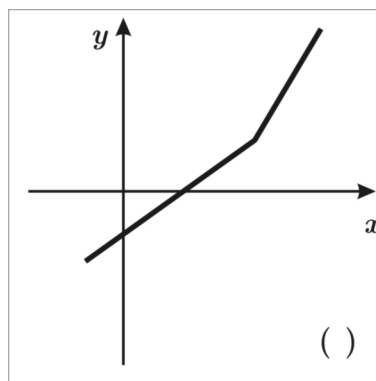
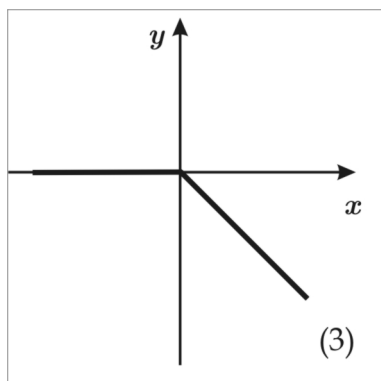
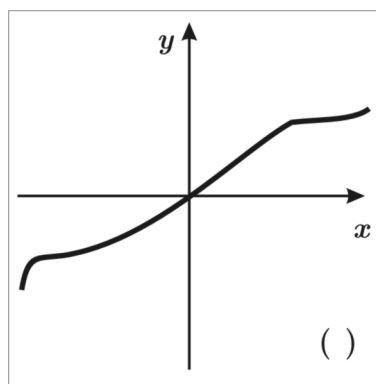
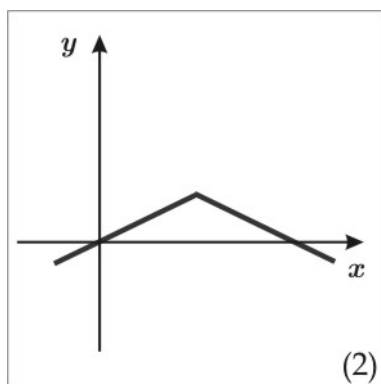
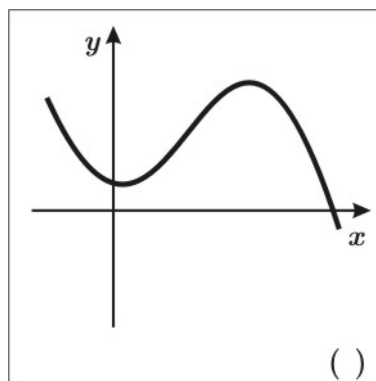
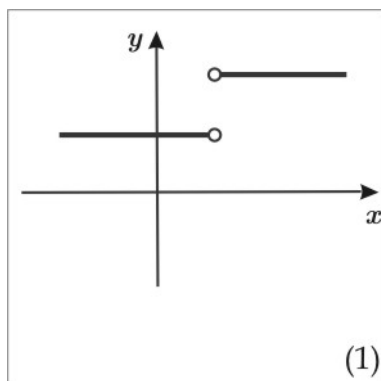
- |  |   |   |
|--|---|---|
| (a) $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$              | (b) $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$                                   | (c) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0.5x^4$ |
| (d) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$  | (e) $y = x \arcsen x$   | (f) $y = \frac{(x^2 + 1) \arctg x - x}{2}$          |
| (g) $y = e^x \cos x$                         | (h) $y = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$                 | (i) $y = (3 - 2 \sen x)^5$                          |
| (j) $y = 2x + 5 \cos^3 x$                    | (k) $y = \sqrt{\frac{3 \sen x - 2 \cos x}{5}}$                    | (l) $y = \sqrt{xe^x + x}$                           |
| (m) $y = \arccos(e^x)$                       | (n) $y = \sen(3x) + \cos\left(\frac{x}{5}\right) + \tg(\sqrt{x})$ | (o) $y = \frac{1 + \cos(2x)}{1 - \cos(2x)}$         |
| (p) $y = \arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ | (q) $y = \ln(\sen x)$   | (r) $y = \ln^2 x + \ln(\ln x)$                      |

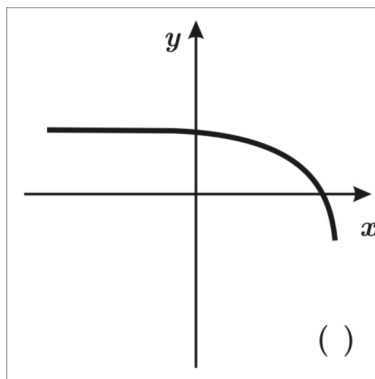
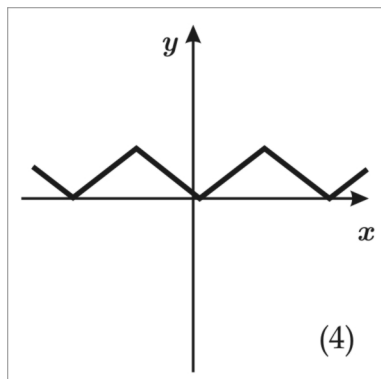
**4.2I** Verifique que a função  $y = xe^{-x}$  é solução da equação  $xy' = (1-x)y$ .

**4.2J** Verifique que a função  $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$  é solução da equação  $xy' = (y \ln x - 1)y$ .

**4.2K** Se  $a$  e  $b$  são constantes quaisquer, verifique que a função  $y = ae^{-x} + be^{-2x}$  é solução da equação  $y'' + 3y' + 2y = 0$ .

**4.2L** Os gráficos da coluna da esquerda são das derivadas das funções cujos gráficos estão na coluna da direita. Faça a correspondência, numerando, convenientemente, a coluna da direita.





## 4.1 Regra da Cadeia e Derivação Implícita

**4.3A** Cada uma das equações abaixo define, implicitamente,  $y$  como função de  $x$ . Encontre  $\frac{dy}{dx}$ .

(a)  $y^3 = x + y$       (b)  $\frac{y}{x-y} + \frac{x}{y} = \sqrt{x}$       (c)  $\sqrt{x+y} = \sqrt{y+1}$

(d)  $4 \cos x \sin y = 1$       (e)  $xy = \cotg(xy)$       (f)  $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

**4.3B** Se  $n$  é um número natural, qual é a derivada de ordem  $n$  da função  $y = (ax + b)^n$ ?

**4.3C** Determine as retas tangente e normal à circunferência  $x^2 + y^2 = 25$ , no ponto  $P_0 = (3, 4)$ .

**4.3D** Mesma questão precedente, considerando agora a hipérbole  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  e  $P_0 = (-5, 9/4)$ .

**4.3E** Suponha que  $f$  seja uma função derivável em seu domínio  $D$  e que, para todo  $x$  em  $D$ , satisfaça  $xf(x) + \sin[f(x)] = 4$ . Se  $x + \cos[f(x)] \neq 0$ , mostre que  $f'(x) = \frac{-f(x)}{x + \cos[f(x)]}$ .

**4.3F** Para cada uma das funções  $f$  definidas abaixo, comprove a existência da inversa  $g$ , determine o domínio desta última e uma expressão que a defina explicitamente. Esboce os gráficos de  $f$  e  $g$ .

(a)  $f(x) = x^2 - 4, x \geq 0$       (b)  $f(x) = x^2 - 4, x \leq 0$       (c)  $f(x) = -\sqrt{1-x}, x \leq 1$

(d)  $f(x) = \frac{x}{x+1}, x > -1$       (e)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, x \geq 0$       (f)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, x \leq 0$

**4.3G** Por meio de restrições adequadas, faça com que cada uma das funções dadas abaixo gere duas funções invertíveis  $f_1$  e  $f_2$ , determinando, em seguida, as respectivas inversas  $g_1$  e  $g_2$ . Calcule as derivadas dessas inversas e esboce os gráficos das funções  $f_1, f_2, g_1$  e  $g_2$ , em cada caso.

(a)  $y = x^2 - 2x - 3$  (b)  $y = -x^2 + x + 2$  (c)  $y = \sqrt{1 - x^2}$  (d)  $y = -\sqrt{4 - x^2}$

**4.3H** Verifique que a função  $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , definida em  $\mathbb{R}$ , tem como inversa a função  $x = g(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ , definida para  $|y| < 1$ .

**4.3I** Qual a inversa da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ ? E da função  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ? Especifique os domínios e as imagens, esboçando, também, os gráficos.

**4.3J** Considere a função  $y = f(x) = x^2 - x - 2$ , definida para  $x \geq 1/2$ , e seja  $x = g(y)$  sua inversa.

(a) Qual o domínio e qual a imagem de  $g$ ? (b) Sabendo-se que  $g(-2) = 1$ , calcule  $g'(-2)$ .

## 4.2 Mais Funções Elementares

**4.4A** Considere as funções  $f(x) = \arctg x + \arctg(1/x)$  e  $g(x) = \arcsen x + \arccos x$ , definidas, respectivamente, para  $x > 0$  e para  $x \in [-1, 1]$ .

(a) Mostre que  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x > 0$ , e que  $g'(x) = 0$ ,  $\forall x \in (-1, 1)$ .

(b) Lembrando que as funções constantes são as que possuem derivada nula, deduza que  $f(x) = \pi/2$ ,  $\forall x > 0$ , e que  $g(x) = \pi/2$ ,  $\forall x \in [-1, 1]$ .

**4.4B** Se  $f$  é uma função derivável, tal que  $f(2) = 1$  e  $f'(2) = 1/2$ , determine a equação da reta tangente à curva  $y = \arctg[f(x)]$ , no ponto de abscissa  $x = 2$ .

**4.4C** Sabendo-se que no ponto  $A(0, 1)$  o gráfico da função  $f(x) = \exp(x^2 + 2x)$  possui a mesma reta tangente que o de uma certa função  $g$ , determine  $g'(0)$ .

**4.4D** Se  $f$  é uma função derivável, tal que  $f'(x) = 2xf(x)$ , mostre que a função  $g(x) = f(x)e^{-x^2}$  é constante.

**4.4E** Para cada uma das funções definidas abaixo, determine o domínio e calcule a derivada de primeira ordem.

(a)  $f(x) = \ln(\sqrt{5 - x^2})$  (b)  $f(x) = \ln(\sen x)$  (c)  $f(x) = x \ln x - x$

(d)  $f(x) = \ln|x|$  (e)  $f(x) = 1/\ln x$  (f)  $f(x) = \ln(\ln x)$

(g)  $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2-x}{3-x}}\right)$  (h)  $f(x) = \ln(\cos(3x+5))$  (i)  $f(x) = \sen(\ln(2x+3))$

**4.4F** Considere a função  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ .

- (a) Qual o domínio de  $f$ ?  
 (b) Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$ , no ponto de abscissa  $x = -1$ ? E no ponto de abscissa  $x = 0$ ?

**4.4G** O *logaritmo* de um número  $N > 0$ , em uma base  $b$ ,  $0 < b \neq 1$ , é definido por meio da equivalência

$$\log_b N = a \iff b^a = N.$$

- (a) Prove a propriedade de Mudança de Base:  $\log_b N = \frac{\ln N}{\ln b}$   
 (b) Se  $f$  é definida por  $f(x) = \log_b x$ , para  $x > 0$ , mostre que  $f'(x) = \frac{1}{x \ln b}$

**4.4H** Calcule a derivada de primeira ordem de cada uma das funções abaixo.

- (a)  $f(x) = e^{\sin x}$     (b)  $f(x) = e^{x^2}$     (c)  $f(x) = (e^x)^2$   
 (d)  $f(x) = 3^{-x}$     (e)  $f(x) = x^x$     (f)  $f(x) = x^{(x^x)}$   
 (g)  $f(x) = (x^x)^x$     (h)  $f(x) = x^2 3^{x \sin x}$     (i)  $f(x) = 2^{x^x}$

**4.4I** As funções trigonométricas hiperbólicas - *seno hiperbólico*, *coseno hiperbólico*, *tangente hiperbólica* e *cotangente hiperbólica* - denotadas, respectivamente, por  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\operatorname{tgh}$  e  $\operatorname{cotgh}$ , são definidas pelas expressões:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Com base nessas definições, mostre que:

- (a)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$     (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$     (c)  $\frac{d}{dx} (\sinh x) = \cosh x$   
 (d)  $\frac{d}{dx} (\cosh x) = \sinh x$     (e)  $\frac{d}{dx} (\operatorname{tgh} x) = (\cosh x)^{-2}$     (f)  $\frac{d}{dx} (\operatorname{cotgh} x) = -(\sinh x)^{-2}$

(A identidade (a) e as derivadas são comprovadas usando as definições das funções hiperbólicas e as regras de derivação. Quanto ao item (b), use o seguinte fato:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \frac{d}{dx}[e^x] \Big|_{x=0} = 1$ .)

**4.4J** Para cada uma das funções dadas abaixo, calcule o limite quando  $x \rightarrow 0$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} f(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} & \text{(b)} f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{3x} & \text{(c)} f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} \\
 \text{(d)} f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{sen} x} & \text{(e)} f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} & \text{(f)} f(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x^2)}{3x} \\
 \text{(g)} f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^3} & \text{(h)} f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(2x^2)} & \text{(i)} f(x) = \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x}{x \operatorname{sen} 3x}
 \end{array}$$

**4.4K** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável e suponha que exista uma constante  $k$  tal que  $f'(x) = kf(x)$ ,  $\forall x$ . Derive o quociente  $f/e^{kx}$  e deduza que existe uma constante  $C$  tal que  $f(x) = Ce^{kx}$ .

**4.4L** No exercício precedente, suponha que  $f$  satisfaça  $f'(x) = -2xf(x)$ . Mostre que existe uma constante  $C$  tal que  $f(x) = Ce^{-x^2}$ .

**4.4M** Se  $f$  satisfaz  $f'(x) = g'(x)f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , mostre que existe  $C$  tal que  $f(x) = C \exp[g(x)]$ .

**4.4N** Esboce o gráfico da função  $y = \ln(1+x)$  e determine a reta normal ao gráfico, que é paralela à reta  $x + 2y = 5$ .

**4.4O** Considere a função  $f(x) = |x+2|^3$ .

- (a) Verifique que  $f$  é derivável em qualquer  $x$  e ache uma expressão para a derivada
- (b) Encontre o ponto  $P_0$  onde a tangente ao gráfico de  $f$  é horizontal;
- (c) Encontre o ponto  $P_0$  onde o ângulo da tangente ao gráfico de  $f$  com o eixo  $x$  é  $60^\circ$ .

**4.4P** Determine as retas tangentes à curva  $y = x^2$  que passam no ponto  $(0, -1)$ .

### 4.3 Problemas de Taxa de Variação

**4.5A** Uma partícula se move de modo que, no instante  $t$ , a distância percorrida é dada por  $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t$ .

- (a) Encontre as expressões que fornecem a velocidade e a aceleração da partícula.
- (b) Em que instante a velocidade é zero?
- (c) Em que instante a aceleração é zero?

**4.5B** Uma partícula move-se sobre a parábola  $y = x^2$ . Sabendo-se que suas coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções deriváveis, em que ponto da parábola elas deslocam-se à mesma taxa?

**4.5C** Um ponto move-se ao longo da curva  $y = \frac{1}{1+x^2}$ , de tal modo que sua abscissa  $x$  varia a uma velocidade constante de  $3 \text{ cm/s}$ . Qual será a velocidade da ordenada  $y$ , quando  $x = 2 \text{ cm}$ ?

**4.5D** Um ponto move-se sobre a parábola  $y = 3x^2 - 2x$ . Supondo-se que suas coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções deriváveis e que  $x'(t) \neq 0$ , em que ponto da parábola a velocidade da ordenada  $y$  será o triplo da velocidade da abscissa  $x$ ?

**4.5E** Um cubo se expande de modo que sua aresta varia à razão de  $12,5 \text{ cm/s}$ . Encontre a taxa de variação de seu volume, no instante em que a aresta atinge  $10 \text{ cm}$  de comprimento.

**4.5F** Uma esfera aumenta de modo que seu raio cresce à razão de  $2,5 \text{ cm/s}$ . Quão rapidamente varia seu volume no instante em que o raio mede  $7,5 \text{ cm}$ ? (o volume da esfera de raio  $r$  é  $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ ).

**4.5G** Sejam  $x$  e  $y$  os catetos de um triângulo retângulo e  $\theta$  o ângulo oposto a  $y$ . Supondo-se que  $x = 12$  e que  $\theta$  decresce à razão de  $1/30 \text{ rad/s}$ , calcule  $y'(t)$ , quando  $\theta = \pi/3 \text{ rad}$ .

**4.5H** Uma escada de  $8 \text{ m}$  está encostada em uma parede vertical. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de  $2 \text{ m/s}$ , com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a  $3 \text{ m}$  da parede?

**4.5I** Uma viga medindo  $30 \text{ m}$  de comprimento está apoiada em uma parede e o seu topo está se deslocando a uma velocidade de  $0,5 \text{ m/s}$ . Qual a taxa de variação de medida do ângulo formado pela viga e pelo chão, quando a topo da viga estiver a uma altura de  $18 \text{ m}$ ?

**4.5J** A Lei de Boyle para a dilatação dos gases é dada pela equação  $PV = C$ , onde  $P$  é a pressão, medida em Newtons por unidade de área,  $V$  é o volume e  $C$  é uma constante. Num certo instante, a pressão é de  $3.000 \text{ N/m}^2$ , o volume é de  $5 \text{ m}^3$  e está crescendo à taxa de  $2 \text{ m}^3/\text{min}$ . Qual a taxa de variação da pressão nesse instante?

**4.5K** Expresse a taxa de crescimento do volume  $V$  de uma esfera, relativamente à superfície  $S$ , em função do raio  $r$  da esfera. Faça o mesmo para o raio, relativamente ao volume.

**4.5L** Num reservatório contendo um orifício, a vazão pelo orifício é de  $110\sqrt{h} \text{ cm}^3/\text{s}$ , onde  $h$  é a altura, em centímetros, do nível da água no reservatório, acima do orifício. O reservatório é alimentado à taxa de  $88 \text{ l}/\text{min}$ . Calcule a altura  $h$  do nível a que o reservatório se estabiliza.

**4.5M** Um balão sobe verticalmente com uma velocidade  $v$  e um observador, a certa distância  $d$ , vê o balão sob um ângulo de elevação  $\theta$ . Ache uma expressão para a taxa  $\frac{d\theta}{dt}$  de variação de  $\theta$  em termos de  $v$ ,  $\theta$  e  $d$ . A que velocidade sobe o balão se  $d = 500 \text{ m}$  e  $\frac{d\theta}{dt} = 0,02 \text{ rad}/\text{s}$ , quando  $\theta = \pi/4 \text{ rad}$ .

**4.5N** Uma bola de neve derrete a uma taxa volumétrica  $dV/dt$  proporcional à sua área. Mostre que o seu raio  $r$  decresce a uma taxa  $dr/dt$  constante.

**4.5O** Um reservatório cônico, com vértice para baixo, contém água de volume  $V$  até uma altura  $h$ . Supondo que a evaporação da água se processa a uma taxa  $dV/dt$  proporcional à sua superfície, mostre que  $h$  decresce a uma taxa  $dh/dt$  constante

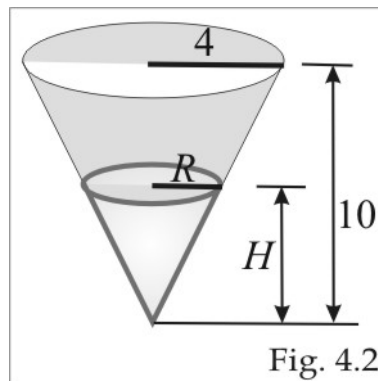
**4.5P** Uma piscina está sendo esvaziada de tal forma que  $V(t) = 300(20 - t)^2$  representa o número de litros de água na piscina  $t$  horas após o início da operação. Calcule a velocidade (instantânea) de escoamento da água ao cabo de 8 horas e a velocidade média desse escoamento no mesmo tempo.

**4.5Q** Uma estátua de altura  $h$  está sendo instalada sobre um pedestal de altura  $l$  acima do plano horizontal que passa pelo olho de um observador. Com o observador a uma distância  $x$ , calcule a taxa de variação, em relação a  $x$ , do ângulo  $\theta$  sob o qual o observador vê a estátua, em termos de  $h$ ,  $l$  e  $x$ . Qual o valor dessa taxa se  $h = 20$ ,  $l = 5$  e  $x = 50$ ?

**4.5R** A figura ao lado mostra um reservatório cônico de  $10\text{m}$  de altura e  $4\text{m}$  de raio contendo água, que escoa a uma vazão de  $5\text{m}^3/\text{hora}$ .

(a) Qual a relação entre as variáveis  $R$  e  $H$ ?

(b) A que taxa o nível da água diminui, quando  $H = 6\text{m}$ ?



## Respostas e Sugestões

- 4.1A** (a)  $2x$  (b)  $6x$  (c)  $2x$  (d)  $4x - 3$  (e)  $-1/(x+1)^2$  **4.1B** (a)  $-1$  (b)  $f'_-(0) = -1$   
e  $f'_+(0)$  não existe (c) não **4.1C** (a) não (b) sim (c)  $f'(x) = 2$ , se  $x > 0$  e  $f'(x) = 0$ , se  
 $x < 0$  **4.1D** (a)  $\nexists f'(0)$  (b)  $\nexists f'(1)$  (c)  $\exists f'(1)$  e  $f'(1) = 1/2$  **4.1E**  $0$  e  $4$  **4.1F**  
 $f(1) = 0$  e  $f'(1) = 5$  **4.1G**  $f(0) = 0$  e  $f'(x) = 5x + 3$  **4.1H**  $a = 6$  e  $b = -3$  **4.1I** (a)  
 $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$  e  $y = -3x + 28$  (b)  $y = \frac{1}{8} - \frac{3}{2^9}(x - 16)$  e  $y = \frac{1}{8} - \frac{2^9}{3}(x - 16)$  (c)  $y = \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x - 3)$   
e  $y = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}(x - 3)$  **4.1J**  $y = -8x - 16$  **4.1K**  $y \pm \frac{9}{16} = \frac{8}{9}(x \mp \frac{3}{2})$  **4.1L**  $x =$   
 $2$ ;  $y = 0$  **4.1M**  $y = 4x - 4$  **4.1O**  $y = -13/6$  e  $y = 7/3$  **4.1P** (b) não (c) não  
**4.1Q** (a) sim (b) não **4.1R** (a)  $f'(x) = -2x$ , se  $x < 0$  e  $f'(x) = 2x$ , se  $x > 0$  (b)  
 $f'(0) = 0$  **4.2A**  $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{2u}{(x-1)^2 \sqrt{1+u^2}}$  **4.2E**  $2x + y + 5 = 0$ ;  $x - 2y - 5 = 0$   
**4.2F**  $h(2) = -15$  **4.2H** (a)  $-\pi/x^2$  (b)  $-1/3 + 2x - 2x^3$  (c)  $4/3x^2 \sqrt[3]{x} - 2/3x^3 \sqrt{x^2}$  (d)  
 $1/\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2$  (e)  $\arcsen x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  (f)  $x \arctg x$  (g)  $e^x (\cos x - \sen x)$  (h)  $\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2}$  (i)  
 $-10(3 - 2 \sen x)^4 \cos x$  (j)  $2 - 15 \cos^2 x \sen x$  (k)  $\frac{3 \cos x + 2 \sen x}{2\sqrt{15} \sen x - 10 \cos x}$  (l)  $\frac{e^x(x+1)+1}{2\sqrt{x}(e^x+1)}$  (m)  
 $\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$  (n)  $3 \cos 3x - \frac{1}{5} \sen(x/5) + \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2(\sqrt{x})}$  (o)  $-2 \cotg x \cos(\sec^2 x)$  (p)  $\frac{-1}{1+x^2}$  (q)  
 $\cotg x$  (r)  $\frac{2 \ln x}{x} - \frac{1}{x \ln x}$  **4.3L** De cima para baixo, a correspondência segue a seqüência 2, 4, 1  
e 3 **4.3A** (a)  $y' = \frac{1}{3y^2 - 1}$  (b)  $y' = \frac{(x-y)^2 [y^2 + 2\sqrt{xy}y^3 - 2\sqrt{xy}y]}{2\sqrt{x}(x-y)[y^2 + y^3 - x(x-y)]}$  (c)  $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}$   
(d)  $y' = \tg x \tg y$  (e)  $y' = \frac{-y}{x}$  (f)  $y' = \frac{4xy\sqrt{xy} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$  **4.3B**  $n!a^n$  **4.3C**  $3x + 4y = 25$  e  
 $4x - 3y = 0$  **4.3D**  $y = \frac{-5}{4}x - 4$  e  $y = \frac{4}{5}x + \frac{25}{4}$  **4.3F** (a)  $g(y) = \sqrt{y+4}$ ,  $-4 \leq y$  (b)  
 $g(y) = -\sqrt{y+4}$ ,  $-4 \leq y$  (c)  $g(y) = 1 - y^2$ ,  $y \leq 0$  (d)  $g(y) = \frac{y}{1-y}$ ,  $y < 1$  (e)  $g(y) =$   
 $\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ ,  $0 \leq y < 1$  (f)  $g(y) = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ ,  $0 \leq y < 1$

**4.3G**

- (a)  $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3, & x \leq 1 \\ x = 1 - \sqrt{y+4}, & y \geq -4 \end{cases}$  e  $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3, & x \geq 1 \\ x = 1 + \sqrt{y+4}, & y \geq -4 \end{cases}$   
(b)  $\begin{cases} y = -x^2 + x + 2, & x \leq 1/2 \\ x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - y}, & y \leq \frac{9}{4} \end{cases}$  e  $\begin{cases} y = -x^2 + x + 2, & x \leq 1/2 \\ x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - y}, & y \leq \frac{9}{4} \end{cases}$

$$(c) \begin{cases} y = \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ x = -\sqrt{1-y^2}, & 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y = \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ x = \sqrt{1-y^2}, & 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y = \sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 0 \\ x = -\sqrt{4-y^2}, & -2 \leq y \leq 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y = -\sqrt{4-x^2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ x = \sqrt{4-y^2}, & -2 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

**4.3I** (a)  $x = 1/y, y \neq 0$  (b)  $x = \frac{-y}{y-1}, y \neq 1$  **4.3J** (a)  $D(g) = [-\frac{9}{4}, +\infty)$  e  $\text{Im}(g) = [\frac{1}{2}, +\infty)$  (b)  $g'(-2) = 1$  **4.4B**  $y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(x-2)$  **4.4C**  $g'(0) = 2$  **4.4E** (a)  $D(f) = ]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$  e  $f'(x) = -\frac{x}{5-x^2}$  (b)  $D(f) = ]2k\pi, (2k+1)\pi[$  e  $f'(x) = \cotg x$  (c)  $D(f) = ]0, +\infty[$  e  $f'(x) = \ln x$  (d)  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$  e  $f'(x) = 1/x$  (e)  $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$  e  $f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$

(f)  $D(f) = ]1, +\infty[$  e  $f'(x) = -\frac{1}{x \ln x}$  (g)  $D(f) = ]-\infty, 2[ \cup ]3, +\infty[$  e  $f'(x) = -\frac{1}{2(2-x)(3-x)}$

(h)  $D(f) = ]-\frac{1}{3}(2k\pi + \frac{\pi}{2} + 5), \frac{1}{3}(2k\pi + \frac{\pi}{2} - 5)[$  e  $f'(x) = -3 \text{tg}(3x+5)$  (i)  $D(f) = ]-\frac{3}{2}, +\infty[$  e  $f'(x) = \frac{2}{2x+3} \cos[\ln(2x+3)]$  **4.4F** (a)  $\mathbb{R}$  (b)  $y+1 = -x + \ln 2; y = 0$  **4.4G** Basta

notar que  $N = b^a \Rightarrow \ln N = a \ln b$  e, portanto,  $\log_b N = a = \frac{\ln N}{\ln b}$  **4.4H** (a)  $\cos x \exp(\sen x)$

(b)  $2x \exp(x^2)$  (c)  $2 \exp(2x)$  (d)  $-3^{-x} \ln 3$  (e)  $x^x(1 + \ln x)$  (f)  $x^{(x^x)}[x^x \ln x(1 + \ln x) + x^{x-1}]$

(h)  $3^{x \sen x}[2x + x^2 \ln 3(\sen x + x \cos x)]$  (g)  $(x^x)^x[x + 2x \ln x]$  (i)  $2^{x^x}[x^x(1 + \ln x)] \ln 2$  **4.4J**

(a) 2 (b) 1/3 (c) 1 (d) 1 (e) 0 (f) 0 (g) 1 (h) 1/2 (i) 2/3 **4.4N**  $x + 2y = \ln 4 - 1$

**4.4O** (a)  $f'(x) = |x+2|(x+2)$  (b)  $(-2, 0)$  (c)  $(-2 \pm 1/3^{3/4}, \pm 1/81\sqrt{3})$  **4.4P**  $y =$

$\pm 2x - 1$  **4.5A** (a)  $v(t) = t^2 - 2t - 3; a(t) = 2t - 2$  (b)  $t = 3$  (c)  $t = 1$  **4.5B**  $P =$

$(1/2, 1/4)$  **4.5C**  $\frac{-12}{25} \text{cm/s}$  **4.5D** No ponto de abscissa  $x = 5/6$  **4.5E**  $3750 \text{cm}^3/\text{s}$

**4.5F**  $562, 5\pi \text{cm}^3/\text{s}$  **4.5G**  $-\frac{8}{5} \text{unid/s}$  **4.5H**  $-\frac{6}{\sqrt{55}} \text{m/s}$  **4.5I**  $-\frac{1}{48} \text{rad/s}$  **4.5J**

$-1200 \text{N/m}^2$  **4.5K**  $\frac{dV}{dS} = \frac{r}{2}$  e  $\frac{dr}{dV} = \frac{1}{4\pi r^2}$  **4.5L**  $h = \frac{1600}{9} \text{cm}$  **4.5M**  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v \cos^2 \theta}{h+l}$

e  $v = 20 \text{m/s}$  **4.5P**  $-\frac{dV}{dt} = 7200 \text{l/h}$  e  $\frac{V}{t} = 5400 \text{l/h}$  **4.5Q**  $\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{x^2+l^2} - \frac{h+l}{x^2+(h+l)^2}$

e  $\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{125}$  **4.5R**  $\frac{dH}{dt} = -\frac{125}{144\pi} \text{m/hora}$