2. Derivadas Parciais

2.1 Derivadas Parciais

2.1A Em cada caso calcule as derivadas $z_x,\ z_y,\ z_{xx},\ z_{yy}$ e z_{yx} :

(a) $z = 3x^2 + y^3$ (b) $z = \operatorname{arctg}(y/x)$ (c) $z = xy\exp\left(x^2 + y^2\right)$

(d) $z = \operatorname{sen}(xy) + \log\left(x^2 y\right)$ (e) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ (f) $z = \arccos(xy)$

2.1B Em cada caso calcule a derivada indicada da função $z = f(x, y)$.

(a) $z = x\operatorname{arcsen}(x - y)\,;\ f_x(1, 1/2)$ (b) $z = \exp(xy)\sec(x/y)\,;\ f_y(0, 1)$

(c) $z = \sqrt{x^2 + y^2};\ f_{xy}(1, 0)$ e $f_{yx}(1, 0)$ (d) $z = xy\ln(x/y)\,;\ f_y(1, 1)$

2.1C Considere a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \exp(\dfrac{-1}{x^2 + y^2}), \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \text{ se } (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

Calcule, caso existam, as derivadas parciais $\varphi_x(0, 0)\,,\ \varphi_y(0, 0)\,,\ \varphi_{xy}(0, 0)$ e $\varphi_{yx}(0, 0)\,.$

2.1D Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}), \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \text{ se } (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

(a) Mostre que $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)\,;$

(b) Investigue a continuidade das derivadas parciais f_x e f_y na origem.

2.1E Seja $f(x, y) = x^2 + y^3$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x^2 + y^2, y\right)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f\left(x^2 + y^2, y\right)\right].$

2.1F Mostre que a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ satisfaz à equação diferencial $xz_x + yz_y = z$.

2.1G Verifique que a função $u(x, t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4kt}\right)$, $t > 0$ e k uma constante não nula, satisfaz a *equação de transmissão de calor* $u_t - ku_{xx} = 0$.

2.1H O *operador de Laplace* Δ em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Mostre que as funções $u(x,y) = \arctan(y/x)$ e $u(x,y) = e^x \cos y$ satisfazem a equação de Laplace $\Delta u = 0$.

2.1I Determine condições sobre as constantes A, B, C, D, E e F para que a função $u(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ atenda à equação de Laplace.

2.1J Se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são funções com derivadas parciais contínuas até a 2^a ordem e satisfazem às equações $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, mostre que u e v atendem à equação de Laplace.

2.2 Funções Diferenciáveis

2.2A Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$. Prove que:

(a) f é contínua na origem;

(b) As derivadas parciais f_x e f_y existem em todo $\mathbb{R}^2$, mas não são contínuas em $(0,0)$;

(c) f não é diferenciável na origem. Por que isso não contradiz o Lema Fundamental?

2.2B Falso ou verdadeiro? Justifique

(a) Se f é diferenciável em P_0, então as derivadas parciais f_x e f_y existem em P_0;

(b) Toda função diferenciável é contínua;

(c) Toda função contínua é diferenciável;

(d) Se $z = f(x,y)$ tem derivadas parciais f_x e f_y no ponto P_0, então f é contínua em P_0;

(e) Se uma função $z = f(x,y)$ tem derivadas parciais f_x e f_y contínuas, então f é diferenciável;

(f) Toda função diferenciável possui derivadas parcias de 1^a ordem contínuas.

(g) Se as derivadas parciais f_x e f_y existem em P_0, então f é diferenciável em P_0.

2.2C Use o Lema Fundamental e mostre que a função $z = f(x,y)$ é diferenciável no domínio indicado.

(a) $z = x^2y^4;\ D = \mathbb{R}^2$ (b) $z = \ln\left(x^2+y^2\right);\ D = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

(c) $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2};\ D = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ (d) $z = \dfrac{\exp(xy)}{x-y};\ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq y\right\}$

2.2D Verifique que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável na origem, embora as derivadas parciais f_x e f_y sejam descontínuas.

2.2E Estude a diferenciabilidade da função $z = f(x,y)$ no ponto P_0 indicado:

(a) $z = x\exp(-y)$; $P_0 = (1,0)$

(b) $z = \left|xy^2\right|$; $P_0 = (0,1)$

(c) $z = \sqrt{|y|}\cos x$; $P_0 = (0,0)$

(d) $z = \sqrt{|xy|}$; $P_0 = (0,0)$

(e) $z = \sqrt{x^2+y^2}$; $P_0 = (0,0)$

(f) $z = \sqrt{|x|(1+y^2)}$; $P_0 = (x,y)$

(g) $z = \begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$; $P_0 = (1,2)$

(h) $z = \begin{cases} \dfrac{1}{xy}, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$; $P_0 = (0,0)$

2.2F Calcule a diferencial das funções seguintes:

(a) $f(x,y) = 5x^3 + 4x^2y - 2y^3$

(b) $f(x,y,z) = e^x yz$

(c) $f(x,y) = x\operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{1+x^2}\right)$

(d) $f(x,y) = \arctan(y/x)$

2.2G Seja $f(x,y,z) = xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}$, se $(x,y,z) \neq \vec{0}$ e $f(0,0,0) = 0$. Mostre que as 3 derivadas parciais f_x, f_y e f_z embora existam na origem, a função f não é diferenciável em $\vec{0}$.

2.3 Aplicações

2.3A Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva dada no ponto P_0 indicado.

(a) $\begin{cases} 3x - 5y - z + 7 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$; $P_0(1,2,0)$

(b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x = 1 \end{cases}$; $P_0(1,3,2)$

(c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases}$; $P_0(1,1,\sqrt{2})$

(d) $\begin{cases} z = 2xy\left(x^2+y^2\right)^{-1} \\ y = -1 \end{cases}$; $P_0(1,-1,-1)$

2.3B Uma função diferenciável $z = f(x,y)$ satisfaz as condições: $f(1,2) = 3$, $f_x(1,2) = 5$ e $f_y(1,2) = 8$. Calcule os valores aproximados de $f(1.1, 1.8)$ e $f(1.3, 1.8)$. [resp. 1.9 e 2.9]

2.3C Com a diferencial aproxime o valor de $\operatorname{sen}[1.99\ln(1.03)]$ e $\sqrt{4.02} + \sqrt[3]{8.03}$. [resp. 0.06 e 4.01]

2.3D Um tanque cilíndrico metálico com tampa tem altura de 1.2 m e raio 80 cm em suas dimensões internas. Se a espessura das paredes é de 5 mm, calcular a quantidade aproximada de metal usado na fabricação do tanque. [resp. 50265.6 cm^3, com erro da ordem 23×10^{-6}]

2.3E Dois lados de uma área triangular medem $x = 200$ m e $y = 220$ m, com possíveis erros de 10cm. O ângulo entre esses lados é de 60^o, com possível erro de 1^o. Calcule o erro aproximado da área triangular. [resp. 210.15 m^2]

2.3F Um observador vê o tôpo de uma torre sob um ângulo de elevação de 30^o, com um possível erro de $10'$. Se a distância da torre é de 300 m, com um possível erro de 10 cm, use a aproximação $10' \approx 0.003$ rd e calcule a altura aproximada da torre e seu possível erro. [resp. $h = 100\sqrt{3}$ erro 1.2756 m]

2.3G As dimensões de uma caixa retangular são $5m$, $6m$ e $8m$, com possível de $0.01m$ em cada dimensão. Calcule o valor aproximado do volume da caixa e o possível erro. [resp. $V = 241.18m^3$, erro $1.18m^3$]

2.3H Duas resistências r_1 e r_2 estão conectadas em paralelo, isto é, a resistência equivalente R é calculada por $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. Supondo que $r_1 = 30$ $ohms$ e aumenta $0,03$ $ohms$ e que $r_2 = 50$ $ohms$ e diminui $0,05$ $ohms$, determine a variação aproximada da resistência total R. [-13×10^{-5} $ohms$]

2.3I O comprimento l e o período T de um pêndulo simples estão relacionados pela equação $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Se o valor de l é calculado quando $T = 1$ seg e $g = 32$ pes/s^2, determine o erro cometido se na realidade $T = 1,02$ seg e $g = 32,01$ pes/s^2 [resp. $\frac{1,29}{4\pi^2} \approx 4\%$]

2.3J Uma indústria produz dez mil caixas de papelão fechadas com dimensões 3 dm, 4 dm e 5 dm. Se o custo do papelão a ser usado é de $R\$$ 0.05 por dm^2 e as máquinas usadas no corte do papelão cometem erro de 0.05 dm em cada dimensão, qual o erro aproximado na estimativa do custo do papelão? [resp. $R\$$ $1.200,00$]

2.3K Uma caixa sem tampa vai ser fabricada com madeira de 0.6 cm de espessura. As dimensões internas da caixa sendo 60 cm de comprimento, 30 cm de largura e 40 cm de altura, calcule a quantidade de madeira usada na fabricação da caixa.

2.4 Regra da Cadeia

2.4A Sejam $f(x,y) = \int_x^y \ln(1+\operatorname{sen}^2 t)dt$ e $g(x,y) = \int_x^{x^2y} \exp(\cos t)\,dt$. Use o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia e calcule as derivadas parciais f_{xy} e g_{xy}.

2.4B Se $f(x,y) = \operatorname{sen}(x/y) + \ln(y/x)$, mostre que $xf_x + yf_y = 0$.

2.4C Seja a função $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+2xy+y^2}}{x+y}$ definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x+y \neq 0\}$. Verifique que f_x e f_y são identicamente nulas em D, mas f não é constante.

2.4D Dada uma função real derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostre que as funções $\varphi(x,y) = f(x-y)$ e $\psi(x,y) = f(xy)$ satisfazem às relações: $\varphi_x + \varphi_y = 0$ e $x\psi_x - y\psi_y = 0$.

2.4E Calcule $\dfrac{dz}{dt}$ nos seguintes casos:

(a) $z = ye^x + xe^y;\ x = t$ e $y = \operatorname{sen} t$ (b) $z = \ln(1+x^2+y^2);\ x = \ln t$ e $y = e^t$

(c) $z = \sqrt{x^2+y^2};\ x = t^3$ e $y = \cos t$ (d) $z = u^2v + vw^2 + uvw^3;\ u = t^2,\ v = t$ e $w = t^3$

2.4F Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ nos seguintes casos:

(a) $w = u^2 + v^3;\ u = 3x - y$ e $v = x + 2y$ (b) $w = \ln(t^2+s^2);\ t = x^3 + y^2$ e $s = 3xy$

(c) $w = 3u + 7v;\ u = x^2y$ e $v = \sqrt{xy}$ (d) $w = \cos(\xi + \eta);\ \xi = x + y$ e $\eta = \sqrt{xy}$

2.4G Considere a função $f(x,y) = \int_x^y \exp(t^2)\,dt$. Calcule as derivadas parciais $f_s,\ f_r$ e f_{rs}, no caso em que $x = rs^4$ e $y = r^4s$.

2.4H Sejam $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ o vetor posição do ponto $P(x,y)$ e $r = \|\vec{r}\|$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função duas vêzes derivável e $z = f(r)$, mostre que $\Delta z = z_{rr} + \frac{1}{r}z_r$.

2.4I Considere duas funções reais $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sejam $w = f(u)$ e $u = g(x,y)$. Admitindo a existência das derivadas envolvidas, deduza que

$$\Delta w = f''(u)\left(g_x^2 + g_y^2\right) + f'(u)\,\Delta g.$$

2.4J Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dita *homogênea* de grau n quando $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$, $\forall t > 0,\ \forall (x,y) \in D$. Mostre que qualquer função homogênea f satisfaz à relação:

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = nf(x,y) \text{ em } D.$$

Verifique que as funções $z = x^2 + y^2$ e $z = \left(x^2 - 3xy + y^2\right)\left(2x^2 + 3y^2\right)^{-1/2}$ são homogêneas.

2.4K Com as hipóteses do Exercício 2.10 e admitindo que $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, deduza as relações:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

2.4L Seja $f(u,v)$ uma função diferenciável e seja $z = f(x-y, y-x)$. Mostre que $z_x + z_y = 0$.

2.4M Sejam φ e ψ funções reais deriváveis e suponha que $\varphi'(1) = 4$.

(a) Se $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\psi(x/y)$, mostre que $xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = 2f(x,y)$;

(b) Se $g(x,y) = \varphi(x/y)$, calcule $g_x(1,1)$ e $g_y(1,1)$.

2.5 Derivada Direcional e Gradiente

2.5A Calcule a derivada direcional da função $z = f(x,y)$ no ponto P_0, na direção indicada:

(a) $z = x^3 + 5x^2y$, $P_0(2,1)$ na direção da reta $y = x$;

(b) $z = y\exp(xy)$, $P_0(0,0)$ na direção da reta $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$;

(c) $z = x^2 - y^2$, $P_0(2,3)$ na direção tangente à curva $2x + 5y^2 = 15$, no ponto $(0,\sqrt{3})$;

2.5B Calcule a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ nos seguintes casos:

(a) $f(x,y,z) = e^{-y}\operatorname{sen}x + \frac{1}{3}e^{-3y}\operatorname{sen}3x + z^2$; $P_0(\pi/3,0,1)$ e $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$;

(b) $f(x,y,z) = x^2y + 3yz^2$; $P_0(1,-1,1)$ e $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$;

(c) $f(x,y,z) = \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$; $P_0(1,1,1)$ e $\vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$;

2.5C Calcule o valor máximo da derivada direcional da função $w = f(x,y,z)$ no ponto P_0:

(a) $w = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}$; $P_0(1,2,-3)$ (b) $w = e^x\cos(yz)$; $P_0(1,0,\pi)$

2.5D Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável em cada ponto do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Mostre que a derivada direcional de f no ponto (x,y) na direção da tangente ao círculo é $-yf_x + xf_y$.

2.5E Encontre o plano tangente e a reta normal à superfície dada no ponto indicado:

(a) $z = x^2 - y^2$; $P_0(1,1,0)$ (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$; $P_0(1,1,1)$

(c) $z = x\sqrt{x^2+y^2}$; $P_0(3,-4,15)$ (d) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; $P_0(-1,2,2)$

2.5F Seja γ a curva em $\mathbb{R}^3$ descrita por: $x = \operatorname{sen} t,\ y = \operatorname{sen} t$ e $z = \cos 2t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Mostre que a curva γ está contida no parabolóide $x^2 + y^2 + z = 1$ e determine a reta tangente e o plano normal à curva no ponto correspondente a $t = \pi/4$.

2.5G Calcule ∇f e verifique em cada caso que este vetor é normal as curvas ou superfícies de nível.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ (b) $f(x,y) = \exp\left(x^2 + y^2\right)$ (c) $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - xz$

2.5H Seja $f(x,y,z) = 3x + 5y + 2z$ e denote por $\vec{v}$ o campo de vetores normais exteriores à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Calcule a derivada direcional $D_{\vec{v}} f(x,y,z)$.

2.5I Calcule a derivada direcional no ponto $P_0(3,4,5)$ da função $w = x^2 + y^2 + z^2$, na direção tangente à curva $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25 \end{cases}$ no ponto P_0.

2.5J Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Verifique que f tem derivada direcional na origem em qualquer direção, mas não é aí diferenciável.

2.5K Admitindo as operações possíveis e considerando λ constante, prove as seguintes *regras de derivação*:

(a) $\nabla(\lambda f + g) = \lambda \nabla f + \nabla g$ (b) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$ (c) $\nabla(f/g) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

2.5L Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ o vetor posição de um ponto $P(x,y,z)$ do $\mathbb{R}^3$ e represente por r sua norma. Se $f(t)$ é uma função real derivável, mostre que:

$$\nabla f(r) = f'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}.$$

Usando essa fórmula, calcule $\nabla(r)$, $\nabla(1/r)$ e $\nabla(\ln r)$.

2.5M Sejam $0 < \alpha < 1/2$ e $f(x,y) = |xy|^\alpha$. Mostre que:

(a) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$;

(b) f tem derivada direcional na origem apenas nas direções $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

2.6 Aplicações

2.6A Determine a reta tangente à curva, no ponto P_0 indicado:

(a) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 + z = 4 \\ -x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases}$; $P_0\,(1, 2, -3)$ (b) $\begin{cases} 3xy + 2yz + 6 = 0 \\ x^2 - 2xz + y^2 z = 1 \end{cases}$; $P_0\,(1, -2, 0)$

2.6B Calcule a derivada direcional no ponto $P_0\,(1, 2, 3)$ da função $w = 2x^2 - y^2 + z^2$, na direção da reta que passa nos pontos $A\,(1, 2, 1)$ e $B\,(3, 5, 0)$.

2.6C Considere a curva de equações paramétricas $x = t,\ y = t^2$ e $z = t^3,\ -\infty < t < \infty$.

(a) Determine a reta tangente e o plano normal no ponto $P_0\,(2, 4, 8)$;

(b) Determine a reta tangente que passa no ponto $P_1\,(0, -1, 2)$;

(c) Verifique se existe reta tangente passando no ponto $Q_1\,(0, -1, 3)$.

2.6D Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, com $f'(t) > 0,\ \forall t$. Se $g\,(x, y) = f\left(x^2 + y^2\right)$, mostre que a derivada direcional $D_{\vec{v}}\, g\,(x, y)$ será máxima quando $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

2.6E Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, mostre que os planos tangentes à superfície de equação $z = yf\,(x/y)$ passam todos pela origem.

2.6F Determine o plano tangente à superfície $z = 2x^2 + y^2 - 3xy$, paralelo ao plano de equação $10x - 7y - 2z + 5 = 0$. [resp. $10x - 7y - 2z = 6$]

2.6G Determine um plano que passa nos pontos $P\,(5, 0, 1)$ e $Q\,(1, 0, 3)$ e que seja tangente à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$. [resp. $2x + 4y + 4z = 14$]

2.6H Determine os pontos da superfície $z = 8 - 3x^2 - 2y^2$ nos quais o plano tangente é perpendicular à reta $x = 2 - 3t,\ y = 7 + 8t,\ z = 5 - t$. [resp. $P_0\,(1/2, -2, -3/4)$; $\alpha : 12x - 32y + 4z = 67$]

2.6I Determine o ponto da superfície $z = 3x^2 - y^2$ onde o plano tangente é paralelo ao plano de equação $3x + y + 2z = 1$. [resp. $P_0\,(-1/4, 1/4, 1/8)$; $\alpha : 3x + y + 2z + 1/4 = 0$]

2.6J Determine em que pontos da superfície $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y$ o plano tangente é horizontal. [resp. $P_0\,(0, -2, -4)$]

2.6K Mostre que a reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, no ponto P_0 passa pela centro da esfera.

2.6L A temperatura T no ponto (x, y) de uma placa metálica circular com centro na origem vem dada por $T(x, y) = \dfrac{400}{2 + x^2 + y^2}\ {}^oC$. Qual a direção que se deve tomar a partir do ponto $A(1, 1)$ de modo que a temperatura aumente o mais rápido possível e com que velocidade $T(x, y)$ aumenta ao passar pelo ponto A nessa direção? [resp. $\frac{-\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$; $50\sqrt{2}\ {}^oC/cm$]

2.6M Um ponto P se move ao longo de uma curva γ em um campo escalar diferenciável $w = f(x, y, z)$ a uma velocidade $\frac{ds}{dt}$. Se $\vec{T}$ representa o vetor tangente unitário à curva γ, prove que a taxa instatânea de variação de w em relação ao tempo, no ponto P, é $(\vec{T} \cdot \nabla f)\frac{ds}{dt}$.

2.6N A superfície de um lago é representada por uma região D do plano xy de modo que a profundidade (medida em metros) sob o ponto (x, y) é $p(x, y) = 300 - x^2 - y^2$. Em que direção um bote no ponto $A(4, 9)$ deve navegar para que a profundidade da água decresça mais rapidamente? Em que direção a profundidade permanece a mesma?

2.6O A temperatura no ponto (x, y, z) do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ vem dada por $T(x, y, z) = xy + z$. Qual a taxa instantânea de variação da temperatura, em relação a t, ao longo da *hélice* $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = t$? Qual a taxa no ponto $P_0(1, 0, 0)$ da hélice?

2.6P A temperatura no ponto (x, y) de uma placa retangular é $T(x, y) = x \operatorname{sen} 2y$. Um ponto P se move no sentido horário, ao longo do círculo unitário centrado na origem, a uma velocidade constante de 2 unidades de comprimento de arco por segundo. Qual a velocidade de variação de temperatura no instante em que o ponto P se situar em $(1/2, \sqrt{3}/2)$? [resp. $-\cos\sqrt{3} + \sqrt{3}\operatorname{sen}\sqrt{3}$]

2.7 Máximos e Mínimos

2.7A Encontre e classifique os pontos críticos da função $z = f(x, y)$ e determine se ela tem extremo absoluto em seu domínio.

(a) $z = xy$ (b) $z = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4xy + y^2$ (c) $z = xy^2 + x^2y - xy$

(d) $z = x^2 - xy + y^2$ (e) $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 6y$ (f) $z = x^4 + y^3 + 32x - 9y$

(g) $z = 1 - x^2 - 2y^2$ (h) $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - 3x - 4y - 3$ (i) $z = \ln(xy) - 2x - 3y$

(j) $z = x^2 - 2xy + y^2$ (k) $z = xy^2 + 3y^2 - 3xy + 2x - 4y + 1$ (l) $z = x^3 - 3xy^2 + y^3$

2.7B Verifique que no domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0 \text{ e } y > 0\}$ a função f do Exercício 3.1(b) não tem mínimo. Qual o maior valor que f assume em D? Construa uma função contínua em D que não possua máximo nem mínimo.

2.7C Determine o máximo e o mínimo (absolutos) de $z = f(x, y)$ no conjunto D indicado:

(a) $z = xy;\ D : 2x^2 + y^2 \leq 1$ (b) $z = x + y;\ D$ é o quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$

(c) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2};\ D : (x-2)^2 + y^2 \leq 1$ (d) $z = xe^{-x}\cos y;\ D : [-1, 1] \times [-\pi, \pi]$

(e) $z = x^2 + 2y^2 - x;\ D : x^2 + y^2 \leq 1$ (f) $z = x^3 + y^3 - 3x - 3y;\ D : 0 \leq x \leq 2;\ |y| \leq 2$

2.7D Determine o(s) ponto(s) da curva $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = \operatorname{sen}(t/2)$ mais distante(s) da origem.

2.7E Quais das funções seguintes tem um máximo ou mínimo em todo plano $\mathbb{R}^2$?

(a) $z = e^{x^2 - y^2}$ (b) $z = e^{-x^2 - y^2}$ (c) $z = x^2 - 2x(\operatorname{sen} y + \cos y)$.

2.7F Determine o(s) ponto(s) da superfície $z = xy + 2$ mais próximo(s) da origem.

2.7G Determine a distância (mínima) da origem à curva $y^2 = (x-1)^3$. Por que o Método dos Multiplicadores de Lagrange não se aplica nesse caso?

2.7H Com auxílio do Método dos Multiplicadores de Lagrange, resolva os seguintes problemas de extremos vinculados:

(a) $z = 3x + 4y;\ x^2 + y^2 = 1$ (b) $z = \cos^2 x + \cos^2 y;\ x - y = \pi/4,\ 0 \leq x \leq \pi$

(c) $z = x + y;\ xy = 16,\ x > 0,\ y > 0$ (d) $w = xy + yz + xz;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(e) $z = x^2 + y^2;\ x^4 + y^4 = 1$ (f) $w = xyz;\ xy + yz + xz = 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

(g) $w = x + y + z;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (h) $w = (x + y + z)^2;\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

(i) $z = x^2 + 2y^2;\ 3x + y = 1$ (j) $z = x^2y^2;\ 4x^2 + y^2 = 8$

2.7I Calcule a distância do ponto $P_0(1, 0)$ à parábola $y^2 = 4x$.

2.7J Calcule a distância da origem à curva $5x^2 + 5y^2 + 6xy = 1$.

2.7K Determine os pontos da curva interseção do elipsóide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$ com o plano $x - 4y - z = 0$ mais próximos da origem.

2.7L Determine 3 números positivos cuja soma seja α e o produto o maior possível.

2.7M Se x, y e z são números reais não negativos, mostre que $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x+y+z)$.

2.7N Determine o ponto do parabolóide $z = x^2 + y^2$ mais próximo do ponto $A(3, -6, 4)$.

2.7O Determine o ponto da elipse $x^2 + 4y^2 = 16$ mais próximo da reta $x - y = 10$.

2.7P Calcule o maior valor assumido pela função $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y)$ na região compacta $R : 0 \leq x \leq \pi, \ \leq 0 \leq y \leq \pi, \ 0 \leq x + y \leq \pi$.

2.7Q Determine os extremos da função $f(x, y) = 8x^3 - 3xy + y^3$ no quadrado $Q : [0, 1] \times [0, 1]$.

2.7R Calcule o maior valor da expressão $x(y+z)$ quando $x^2 + y^2 = 1$ e $xz = 1$.

2.7S Entre todos os pontos do parabolóide $z = 10 - x^2 - y^2$ que estão acima do plano $x + 2y + 3z = 0$, encontre aquele mais afastado do plano.

2.7T Identifique os pontos críticos da função $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$, sujeitos à condição $x^2yz = 1$.

2.7U Calcule a distância da parábola $y = x^2 + 1$ à reta $x - y = 2$.

2.7V Calcule a distância do parabolóide $z = x^2 + y^2 + 10$ ao plano $3x + 2y - 6z = 0$.

2.7W Quais os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos e mais distantes da origem?

2.8 Problemas de Máximo e Mínimo

2.8A A temperatura T no disco $x^2 + y^2 \leq 1$ é dada por $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$. Em que ponto do disco a temperatura é mais alta e em que ponto ela é mais baixa?

2.8B A temperatura T em um ponto $P(x, y, z)$ da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ é dada por $T(P) = 100xy^2z$. Em qual ponto da esfera a temperatura é máxima e em qual ponto ela é mínima?

2.8C Uma caixa retangular sem tampa deve ter $32m^3$ de volume. Determine suas dimensões de modo que sua área total seja mínima.

2.8D Determine o volume da maior caixa retangular com lados paralelos aos planos coordenados que pode ser colocada dentro do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

2.8E *Método dos Mínimos Quadrados*: A reta $f(x)=ax+b$ que melhor se ajusta aos dados $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $\ldots$, $A_n(x_n,y_n)$ é aquela em que os coeficientes a e b minimizam a função $E(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-y_i]^2$. Esta reta denomina-se *regressão linear*. Encontre a reta que melhor se ajusta aos dados $A(1,3)$, $B(2,7)$ e $C(3,8)$.

2.8F A figura ao lado exibe a posição relativa de três cidades A, B e C. Urbanistas pretendem aplicar o Método dos Mínimos Quadrados, apresentado no Exercício 3.28, para decidir onde construir uma nova escola que atenda às três comunidades. A escola será construída em um ponto $P(x,y)$ de tal forma que a soma dos quadrados das distâncias da escola às cidades A, B e C seja mínima. Determine a posição relativa do local da construção.

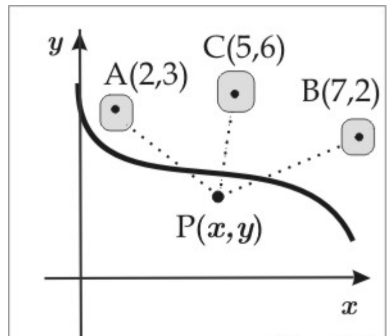

Fig. 2.1

2.8G A tabela abaixo relaciona as médias semestrais e as notas do exame final de 10 alunos da disciplina cálculo 2, no período 06.2.

Média Semestral	4,0	5,5	6,2	6,8	7,2	7,6	8,0	8,6	9,0	9,4
Exame Final	3,0	4,5	6,5	7,2	6,0	8,2	7,6	9,2	8,8	9,8.

Ajuste uma reta a esses dados que estime a nota do exame final de um aluno com média semestral 7,0.

2.8H De todas as caixas retangulares com mesma área, mostre que a de maior volume é o cubo.

2.8I Dentre os triângulos com perímetro p, mostre que o triângulo eqüilátero é o que possui área máxima. (sugestão: a área do triângulo com perímetro p é $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, onde $p=2s=a+b+c$)

2.8J Um paralelepípedo retângulo possui 3 de suas faces nos planos coordenados. Seu vértice oposto à origem está no plano $4x + 3y + z = 36$ e no primeiro octante. Determine esse vértice de tal forma que o paralelepípedo tenha volume máximo.

2.8K Uma janela tem o formato de um retângulo superposto por um triângulo isóceles, como mostra a figura ao lado. Se o perímetro da janela é $12m$, calcule x, y e θ, de modo que a área da janela seja a maior possível.

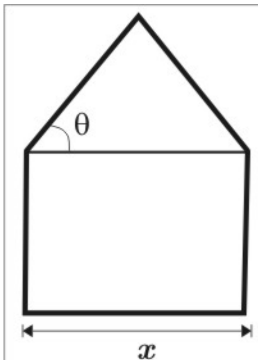

Fig. 2.2

2.8L Uma indústria fabrica caixas retangulares de $8m^3$ de volume. Determine as dimensões que tornam o custo mínimo, se o material para a tampa e a base custa o dobro do material para os lados.

2.8M Determine o retângulo de maior perímetro inscrito na elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

2.8N Uma tenda é projetada na forma de um cilindro circular reto, com teto de forma cônica, como sugere a figura ao lado. Se o cilindro tem raio igual a $5m$ e a área total da superfície que envolve a tenda é $100m^2$, calcule a altura H do cilindro e a altura h do cone, de modo que a tenda tenha o maior espaço interno possível.

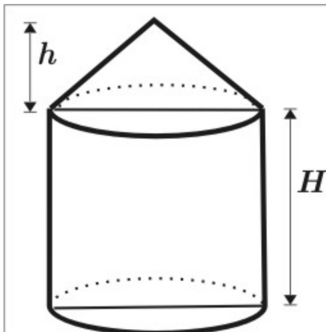

Fig. 2.3

2.8O Três componentes elétricos de um computador estão localizados em $A\,(0,0)$, $B\,(4,0)$ e $C\,(0,4)$. Determine a posição de um quarto componente de modo que a demora do sinal seja mínima.

2.8P Três genes A, B e O determinam os quatro tipos sangüíneos humanos: A (AAou AO), B (BB ou BO) e AB. A lei de *Hard-Weinberg* estabelece que a proporção de indivíduos de uma população que são portadores de 2 genes diferentes é governada pela fórmula $P = 2pq + 2pr + 2rq$, sendo p, q e r as proporções de genes A, B e C, respectivamente, na população. Prove que P não excede $2/3$. Note que p, q e r são não negativos e $p + q + r = 1$.

2.8Q A resistência de uma viga retangular varia como o produto de sua largura pelo quadrado de sua profundidade. Determine as dimensões da viga de maior resistência, cortada de um toro cilíndrico, com seções elípticas de eixos maior e menor medindo $24cm$ e $16cm$, respectivamente.

Alerta! A condição $\nabla f + \lambda \nabla g = \vec{0}$ é necessária mas não suficiente para garantir a ocorrência de um valor extremo de $f(x, y)$ sujeito à restrição (vínculo) $g(x, y) = 0$. Por exemplo, considerando $f(x, y) = x + y$ e a restrição $xy = 16$, o método dos Multiplicadores de Lagrange nos leva aos pontos $P_1(-4, -4)$ e $P_2(4, 4)$ como candidatos a pontos extremos. Ainda assim, f não tem máximo na hipérbole $xy = 16$. Quanto mais distante da origem estiver $P(x, y)$ nessa hipérbole no 1^o quadrante maior será o valor de $x + y$.

2.9 Funções Implícitas e Jacobianos

2.9A Verifique a aplicabilidade do Teorema da Função Implícita e calcule $y'(P_0)$ e $y''(P_0)$.

(a) $y^3 - xy + x^2 - 3 = 0;\ P_0 = (2, 1)$ (b) $\ln(xy) + xy^2 - 1 = 0;\ P_0 = (1, 1)$

(c) $x \ln x + ye^y = 0;\ P_0 = (1, 0)$ (d) $\ln(xy) - 2xy + 2 = 0;\ P_0 = (1, 1)$

2.9B Use o Teorema da Função Implícita e calcule $\dfrac{dx}{dy}$ no ponto P_0 especificado.

(a) $y^3 + x^3 - \cos(xy) = 0;\ P_0 = (1, 0)$ (b) $2x^2 + y^2 - \ln\left(x^2 + y^2\right) = 2;\ P_0 = (1, 0)$

2.9C Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, onde $z = f(x, y)$ é definida pela equação:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (b) $xy(1 + x + y) - z^2 = 0$ (c) $xz^2 - 3yz + \cos z = 0$

2.9D Resolva o sistema $\begin{cases} u + v + \operatorname{sen}(xy) = 0 \\ 3u + 2v + x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ e determine u e v como funções de x e y.

2.9E Um gás ideal obedece a seguinte lei: $PV = kT$, sendo k constante e P, V e T, respectivamente, a pressão, o volume e a temperatura. Deduza a relação: $\dfrac{\partial P}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial P} = -1$.

2.9F Se $F(x,y,z) = 0$, sendo $w = F(x,y,z)$ uma função diferenciável tal que $F(P_0) = 0$, $F_x(P_0) \neq 0$, $F_y(P_0) \neq 0$ e $F_z(P_0) \neq 0$, mostre que em P_0 vale a relação $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$.

2.9G Calcule o Jacobiano das transformações seguintes:

(a) $\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 4y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} u = 3x + 2y \\ v = x - y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} u = e^x - y \\ v = x + 5y \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

(e) $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 2y - z \\ w = 3x \end{cases}$ (f) $\begin{cases} u = x\cos y - z \\ v = x\operatorname{sen} y + 2z \\ w = x^2 + y^2 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x = \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$

2.9H Admitindo a continuidade das derivadas envolvidas, prove as seguintes relações:

(a) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$ (b) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(z,w)} = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}$.

2.9I Considere x e y e z funções de u e v, definidas pelo sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \operatorname{sen}(uv) + 2z^2 = 2 \\ xy - \operatorname{sen} u\cos v + z = 0. \end{cases}$$

Calcule as derivadas $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ no ponto de coordenadas $x = 1,\ y = 1,\ z = 0,\ u = \pi/2$ e $v = 0$.

2.9J Admita que o sistema $\begin{cases} u^3 - 2u - v - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - u - 4 = 0 \end{cases}$ define u e v como funções de x e y e calcule as derivadas $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, no ponto em que $x = 1$ e $y = 2$.

2.9K Admita que o sistema $\begin{cases} x^2 - xt - y^2t^2 + 2s + 2 = 0 \\ y^2 - 2yt + xt^2 - ys + s^2 - 6 = 0 \end{cases}$ define x e y como funções de t e s e calcule as derivadas $\dfrac{\partial x}{\partial t}$, $\dfrac{\partial x}{\partial s}$, $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial s}$, no ponto em que $x = 2$, $y = 0$, $t = 1$ e $s = 1$.

2.9L Considere a transformação $T : \begin{cases} u = e^x + y^3 \\ v = 3e^x - 2y^3. \end{cases}$

(a) Calcule o jacobiano da transformação T e de sua inversa;

(b) Calcule as derivadas $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ no ponto em que $x = 0$ e $y = 1$.

2.9M Considere a transformação $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, com jacobiano $J \neq 0$. Deduza as seguintes regras de derivação:

$$u_x = \frac{1}{J}y_v, \quad u_y = -\frac{1}{J}x_v, \quad v_x = -\frac{1}{J}y_u, \quad v_y = \frac{1}{J}x_u.$$

2.9N Considere a transformação $T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, com jacobiano $J \neq 0$. Mostre que $u_x = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)}$ e $u_y = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(x,z)}{\partial(v,w)}$. Deduza expressões análogas para as derivadas: $u_z,\ v_x,\ v_y,\ v_z,\ w_x,\ w_y$, e w_z.

2.9O Verifique que a mudança de coordenadas $T : (\xi,\eta) = (x + ct, x - ct)$ transforma a equação de ondas $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ na equação simplificada $u_{\xi\eta} = 0$

2.9P Mostre que a mudança de coordenadas $(u,v) = (ax + by, cx + dy)$ transforma o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$ em um paralelogramo de área $\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$.

2.9Q Verifique que a mudança de coordenadas $T : (u,v) = (x/a, y/b)$ transforma a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no círculo unitário de centro na origem do plano uv. Defina uma mudança de coordenadas $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que aplica o elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ na esfera unitária.

2.9R Qual a imagem da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ pela transformação $T(x,y) = (4x, y)$?

2.9S Determine a imagem da reta $x = c$ pela mudança $T(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.

2.9T Esboce no plano xy a região delimitada pelas parábolas $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$ e $y^2 = 2x$ e determine a imagem dessa região pela mudança de coordenadas $x^2 = yu$, $y^2 = xv$.

2.9U Determine a imagem da região $R : |x| + |y| \leq 1$ pela mudança de coordenadas $T : (u,v) = (x + y, x - y)$. Qual a imagem da hipérbole $xy = 1$ por T?

2.9V Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua e positiva. Mostre que a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(u,v) = (f(u), -v + uf(u))$ tem jacobiano não nulo em qualquer ponto (u,v) sendo, portanto, invertível. Verifique que $T^{-1}(x,y) = \left(f^{-1}(x), -y + xf^{-1}(x)\right)$.

2.9W Em cada caso é dada uma mudança de coordenadas $(u, v) = T(x, y)$. Descreva as retas $u = u_0$ e $v = v_0$ nos dois sistemas de coordenadas (plano xy e plano uv) para os valores: $k = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$. Determine a transformação inversa T^{-1}.

(a) $T(x, y) = (3x, 5y)$ (b) $T(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$ (c) $T(x, y) = \left(x^3, x + y\right)$

(d) $T(x, y) = \left(x + 1, 2 - y^3\right)$ (e) $T(x, y) = (e^x, e^y)$ (f) $T(x, y) = \left(e^{2x}, e^{-3y}\right)$

2.9X Em cada caso encontre a imagem da curva c pela mudança de coordenadas $T(x, y)$.

(a) c é o retângulo de vértices $(0,0), (0,1), (2,1)$ e $(2,0)$; $T(x, y) = (3x, 5y)$

(b) c é o círculo $x^2 + y^2 = 1$; $T(x, y) = (3x, 5y)$

(c) c é o triângulo de vértices $(0,0),\ (3,6)$, e $(9,4)$; $T(x, y) = (y/2, x/3)$

(d) c é a reta $3x - 2y = 4$; $T(x, y) = (y/2, x/3)$

(e) c é a reta $x + 2y = 1$; $T(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$

(f) c é o quadrado de vértices $(0,0), (1,-1), (2,0)$ e $(1,1)$; $T(x, y) = (5x + 4y, 2x - 3y)$

(g) c é o o círculo $x^2 + y^2 = 1$; $T(x, y) = (5x + 4y, 2x - 3y)$

2.9Y Seja γ a curva descrita por $\gamma : a\left(x^2 + y^2\right) + bx + cy + d = 0$.

(a) Considere a possibilidade de a ou d ser zero e identifique γ como sendo um círculo ou uma reta;

(b) Determine a imagem da curva γ pela transformação $T(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\right)$.

2.10 Coordenadas Curvilíneas

As quantidades r, θ, z definidas no Exercício 2.9G(g) são denominadas *coordenadas cilíndricas*, enquanto ρ, θ, φ definidas no Exercício 2.9G(h) são as *coordenadas esféricas* do ponto $P(x, y, z)$. Temos:

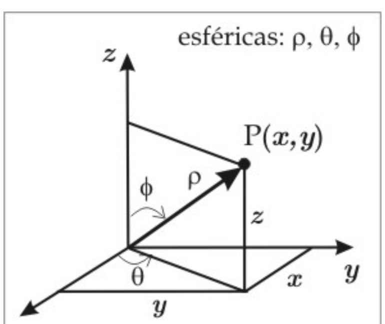

Fig. 2.4a

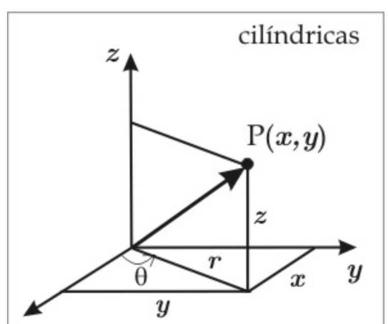

Fig. 2.4b

2.10A Complete a seguinte tabela de coordenadas:

cartesianas: (x, y, z)	cilíndricas: (r, θ, z)	esféricas: (ρ, θ, φ)
$(2, 2, -1)$		
		$(12, \pi/6, 3\pi/4)$
$(1, 1, -\sqrt{2})$		
	$(1, \pi/4, 1)$	

2.10B Identifique a superfície descrita em coordenadas cilíndricas por:

(a) $r = 4$ (b) $\theta = \pi/4$ (c) $z = 2r$ (d) $3r^2 + z^2 = 9$ (e) $r^2 + z^2 = 16$ (f) $r \sec \theta = 4$.

2.10C Identifique a região do $\mathbb{R}^3$ descrita em coordenadas esféricas por:

(a) $\rho = 6 \cos \theta \operatorname{sen} \varphi$ (b) $\rho = 5 \operatorname{cosec} \varphi$ (c) $\theta = \pi/6$ (d) $\cos \varphi = 4$

(e) $\varphi = \pi/4$ (f) $\rho^2 - 3\rho = 0$ (g) $\rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi = 1$ (h) $\rho = 2 \cos \varphi$

(i) $\tan \theta = 4$ (j) $\rho = a$ (k) $\rho^2 - 3\rho + 2 \leq 0$ (l) $\rho = \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{cotg} \varphi$

2.10D As superfícies dadas abaixo estão representadas por suas equações cartesianas. Passe as equações para coordenadas cilíndricas e esféricas.

(a) Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (b) Parabolóide: $4z = x^2 + y^2$

(c) Cone: $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$ (d) Hiperbolóide: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

(e) Plano: $3x + y - 4z = 0$ (f) Cilindro: $x^2 + y^2 = 4$.

2.10E Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas implicitamente pelo sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 u = v \\ x + y^2 = u. \end{cases}$

(a) Expresse as derivadas x_u e y_v em termos de x, y, u e v.

(b) Determine um par de funções $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas implicitamente pelo siatema $(*)$.

Respostas e Sugestões

Exercícios 2.1

2.1A Todas sa derivadas são calculadas usando regras básicas de derivação. Por simplicidade, no ítem (c) substituímos a expressão $e^{x^2+y^2}$ por A.

	z_x	z_y	z_{xx}	z_{yy}	z_{yx}
(a)	$6x$	$3y^2$	6	$6y$	0
(b)	$\dfrac{-y}{x^2+y^2}$	$\dfrac{x}{x^2+y^2}$	$\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$	$\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$	$\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$
(c)	$\left(2x^2+1\right)yA$	$\left(2y^2+1\right)xA$	$\left(6+4x^2\right)xyA$	$\left(6+4y^2\right)xyA$	$\left(1+2x^2+2y^2\right)A$
(d)	$y\cos xy+2/x$	$x\cos xy+1/y$	$-y^2\operatorname{sen} xy-2/x^2$	$-x^2\operatorname{sen} xy-1/y^2$	$\cos xy-xy\sin xy$
(e)	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$	$\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$	$\dfrac{1+y^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$	$\dfrac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$	$\dfrac{-xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$
(f)	$\dfrac{-y}{1-x^2y^2}$	$\dfrac{-x}{1-x^2y^2}$	$\dfrac{-2xy^3}{(1-x^2y^2)^2}$	$\dfrac{-2x^3y}{(1-x^2y^2)^2}$	$\dfrac{x^2y^2-x-2x^2y^3}{(1-x^2y^2)^2}$

2.1B (a) $\pi/6+2/\sqrt{3}$ (b) 0 (c) $f_{xy}(1,0)=f_{yx}(1,0)=0$ (d) -1

2.1C Seja $E(x,y)=\exp[-1/\left(x^2+y^2\right)]$. No ponto $(x,y)\neq(0,0)$, temos $\varphi_x=\dfrac{2xE(x,y)}{x^2+y^2}$ e $\varphi_y=\dfrac{2yE(x,y)}{x^2+y^2}$. Na origem as derivadas são calculadas pela definição. De fato:

$$\varphi_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{\varphi(h,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{-1/h^2}}{h}=0 \quad \text{e} \quad \varphi_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{\varphi(0,k)}{k}=0.$$

Agora, $\varphi_{xy}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_x)(0,0)=\lim_{k\to0}\dfrac{\varphi_x(0,k)-\varphi_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\dfrac{e^{-1/k^2}}{k^3}=0$. De modo análogo mostra-se que $\varphi_{xy}(0,0)=0$.

2.1D Um cálculo direto nos dá:

$$f_x=\begin{cases}\dfrac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, \text{ se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \text{ se } (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad \text{e} \quad f_y=\begin{cases}\dfrac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, \text{ se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \text{ se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) $f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{-k^5}{k^5}=-1$. Do mesmo modo encontra-se $f_{yx}(0,0)=1$. (b) Mostremos que a derivada parcial f_x é contínua na origem. Para isto usaremos o Teorema do Confronto. Temos:

$$0\leq|f_x(x,y)|=\left|\frac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right|\leq\frac{|y|\,y^4+|y|\,x^4+4x^2y^2\,|y|}{(x^2+y^2)^2}\leq6\,|y|\,.$$

Como as extremidades ($g = 0$ e $h = 6|y|$) têm limite zero na origem, então, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0)$, o que demonstra ser f_x contúnua em $(0,0)$. Da mesma forma deduz-se a continuidade de f_y. A conclusão pode ser estabelecida, também, pelo Teorema do Confronto!
2.1E $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x^2+y^2,y\right) = 2\left(x^2+y^2\right)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x}[f\left(x^2+y^2,y\right)] = 4x\left(x^2+y^2\right)$ **2.1F** Calcule, usando regras de derivação, as derivadas z_x e z_y e em seguida o valor da expressão $xz_x + yz_y$. Procedimento semelhante adota-se nos Exercícios 2.7 e 2.8 **2.1H** Temos que $u_{xx} = 2A$ e $u_{yy} = 2C$ e, portanto, $\Delta u = 0$ se, e somente se, $A + C = 0$ **2.1I** $u_x = v_y \Rightarrow u_{xx} = v_{yx}$ e $u_y = -v_x \Rightarrow u_{yy} = -v_{xy}$. Logo, $\Delta u 0 u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Exercícios 2.2

2.2A (a) $f(x,y) = \dfrac{3r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} \to 0$, com $r \to 0$, independente de θ. Logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ e f é contínua em $(0,0)$ (b) As derivadas parciais f_x e f_y são dadas por:

$$f_x = \begin{cases} \dfrac{6xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad f_y = \begin{cases} \dfrac{3x^4 - 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e considerando os caminhos $\gamma_1 : y = 0$ e $\gamma_2 : y = x$ vê-se que f_x e f_y não têm limite em $(0,0)$, sendo, conseqüentemente, descontínuas aí. (c) Note que, neste caso, $\dfrac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{3h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}}$ não tem limite em $(0,0)$ e daí resulta que f não é diferenciável em $(0,0)$. Isto não contradiz o Lema Fundamental, porque neste caso ele não se aplica.
2.2B V, V, F, F, V, F, F. Recorde-se que uma função $z = f(x,y)$ é diferenciável no ponto $P_0(x_0,y_0)$ quando as derivadas parciais f_x e f_y existirem em P_0 e:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k + E(h,k),$$

onde $\dfrac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$, quando $(k,h) \to (0,0)$.
(a) Conseqüência direta da definição. (b) Faça $h,k \to 0$ e deduza que $f(x_0+h,y_0+k) \to f(x_0,y_0)$. Isto é a continuidade de f em P_0. (c) A função do Exercício 2.11 é um contra-exemplo (d) A função $f(x,y) = xy/\left(x^2+y^2\right)$, $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$ tem derivadas parciais de 1[a] ordem na origem, mas não é diferenciável aí. (e) Esta afirmação é o Lema Fundamental! (f) a

função do Exercício 2.14 é um contra-exemplo (g) A existência das derivadas f_x e f_y não implica, sequer, na continuidade.

2.2C Todas as funções apresentadas e suas derivadas z_x e z_y são funções elementares do cálculo sendo, portanto, contínuas no interior de seus respectivos domínios. Sendo as derivadas parciais contínuas, segue do Lema Fundamental que as funções são diferenciáveis.

2.2D As derivadas parciais f_x e f_y na origem são nulas e em um ponto $(x,y) \neq (0,0)$ elas valem:

$$f_x = 2x\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - \frac{x\cos\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad f_y = 2y\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - \frac{y\cos\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Mostre que f_x e f_y não têm limite na origem e conclua que essas derivadas são descontínuas em $(0,0)$. Quanto a diferenciabilidade, observe que:

$$\frac{E\,(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) \longrightarrow 0, \text{ quando } (h,k) \to (0,0)\,,$$

o que acarreta na diferenciabilidade de f na origem.

2.2E (a) $f_x = e^{-y}$ e $f_y = -xe^{-y}$ são contínuas no ponto $(1,0)$ e pela Lema Fundamental f é dierenciável aí. (b) Note que a derivada z_x não existe em P_0 e, portanto, a função $z\,(x,y)$ não pode ser diferenciável naquele ponto. (c) A derivada z_y não existe no ponto $(0,0)$ e a função não pode ser diferenciável aí. (d) $z = \sqrt{|xy|}$ não é diferenciável em $(0,0)$ porque $E\,(h,k)\,/\sqrt{h^2+k^2}$ não tem limite zero, quando $(h,k) \to (0,0)$. (e) As derivadas parciais z_x e z_y não existem em $(0,0)$ e a função não é diferenciável na origem. (f) No domínio $D^+ = \{(x,y)\,;\ x > 0\}$ a função reduz-se a $z = \sqrt{x\,(1+y^2)}$, com derivadas parciais $z_x = \left(1+y^2\right)/2\sqrt{x\,(1+y^2)}$ e $z_y = xy/\sqrt{x\,(1+y^2)}$ contínuas em D^+. Pelo Lema Fundamental, deduzimos que z é diferenciável nesse domínio. Em $D^- = \{(x,y)\,;\ x < 0\}$ a conclusão é a mesma. Em um ponto $P\,(0,b)$ a derivada parcial z_x não existe e, portanto, a função z não é diferenciável. Concluímos então que z é diferenciável em $D^- \cup D^+$. (g) As derivadas parciais z_x e z_y sendo contínuas em $(1,2)$, segue que a função é diferenciável nesse ponto. (h) A função não é diferenciável na origem, porque não é contínua aí. **2.2F** (a) $df = \left(15x^2+8xy\right)dx + \left(4x^2-6y^2\right)dy$ (b) $df = yze^x dx + ze^x dy + ye^x dz$ (c) $df = [\sin\frac{y}{1+x^2} - \frac{2x^2y}{(1+x^2)^2}\cos\frac{y}{1+x^2}]dx + [\frac{x}{1+x^2}\cos\frac{y}{1+x^2}]dy$ (d) $df = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

Exercícios 2.3

2.3A (a) $x = t,\ y = 2,\ z = 3t - 3$; (b) $x = 1,\ y = t,\ z = \frac{13}{2} - \frac{3}{2}t$; (c) $x = 1,\ y = t,\ z = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}t$; (d) $x = t,\ y = -1,\ z = t - 2$.

Exercícios 2.4

2.4A $f_{xy} = 0$ e $g_{xy} = -x^2 \operatorname{sen}(x^2 y) \exp(\cos x^2 y)$ **2.4E** (a) $(\operatorname{sen} t + \cos t) e^t + (1 + t\cos t) e^{\operatorname{sen} t}$ (b) $\dfrac{2\ln t + 2te^{2t}}{t\left[1 + e^{2t} + (\ln t)^2\right]}$ (c) $\dfrac{3t^5 - \cos t \operatorname{sen} t}{\sqrt{t^6 + \cos^2 t}}$ (d) $12t^{11} + 7t^6 + 5t^4$ **2.34** (a) $w_x = 3x^2 + 12y^2 + 12xy + 18x - 6y$; $w_y = 6x^2 + 24y^2 + 24xy - 6x + 2y$ (b) $w_x = \dfrac{6x^4 + 18y^2}{x^5 + 9xy^2}$; $w_y = \dfrac{4xy + 18y}{x^4 + 9y^2}$ (c) $w_x = 6xy + 7y/2\sqrt{xy}$; $w_y = 3x^2 + 7x/2\sqrt{xy}$ (d) $w_x = -\operatorname{sen}\left(x + y + \sqrt{xy}\right) - \dfrac{y \operatorname{sen}\left(x + y + \sqrt{xy}\right)}{2\sqrt{xy}}$; $w_y = -\operatorname{sen}\left(x + y + \sqrt{xy}\right) + \dfrac{x \operatorname{sen}\left(x + y + \sqrt{xy}\right)}{2\sqrt{xy}}$ **2.4F** $f_r = -s^4 e^{r^2 s^8} + 4r^3 s e^{r^8 s^2}$; $f_s = -4rs^3 e^{r^2 s^8} + r^4 e^{r^8 s^2}$ e $f_{rs} = -4s^3 \left(1 + 2r^2 s^8\right) e^{r^2 s^8} + 2r^{12} e^{r^8 s^2}$ **2.4H** Recorde-se que $\Delta z = z_{xx} + z_{yy}$ e usando a Regra da Cadeia, deduza que: $z_{xx} = z'' x^2/r^2 + z' y^2/r^3$ e $z_{yy} = z'' y^2/r^2 + z' x^2/r^3$. Logo, $\Delta z = z'' \dfrac{x^2 + y^2}{r^2} + \frac{1}{r} z' \dfrac{x^2 + y^2}{r^2} = z_{rr} + \frac{1}{r} z_r$ **2.4I** Da Regra da Cadeia resulta $w_x = f'(u)\, u_x \Rightarrow w_{xx} = f''(u)\, u_x^2 + f'(u)\, u_{xx}$ e de modo análogo, obtemos $w_{yy} = f''(u)\, u_y^2 + f'(u)\, u_{yy}$. Logo, $\Delta w = f''(u)\left(u_x^2 + u_y^2\right) + f'(u)\, \Delta u$ **2.4J** Derive a relação $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ em relação a t e, em seguida, faça $t = 1$ para obter o resultado **2.4K** Da Regra da Cadeia sabemos que $u_r = u_x x_r + u_y y_r$ e $v_\theta = v_x x_\theta + v_y y_\theta$ e usando as relações $u_x = v_y,\ u_y = -v_x,\ x_r = \cos\theta,\ y_r = \operatorname{sen}\theta,\ x_\theta = -r\operatorname{sen}\theta$ e $y_\theta = r\cos\theta$, obtemos o resultado **2.4L** Use a Regra da Cadeia e obtenha: $z_x = f_u u_x + f_v v_x$ e $z_y = f_u u_y + f_v v_y$, onde $u = x - y$ e $v = y - x$. Agora, use $u_x = v_y = 1$ e $u_y = v_x = -1$ **2.4M** (a) Temos $f_x = 2x\psi(x/y) + \left(x^2 + y^2\right)\psi'(x/y)(1/y)$ e $f_x = 2y\psi(x/y) + \left(x^2 + y^2\right)\psi'(x/y)\left(-x/y^2\right)$. Logo, $xf_x + yf_y = 2\left(x^2 + y^2\right)\psi(x/y) = 2f$ (b) Temos $g_x = \frac{1}{y}\varphi'(x/y)$ e $g_y = \frac{-x}{y^2}\varphi'(x/y)$ e daí resulta $g_x(1,1) = 1$ e $g_y(1,1) = -1$

Exercícios 2.5

2.5A (a) $26\sqrt{2}$ (b) $3/5$ (c) $\left(20 + 2\sqrt{3}\right)/\sqrt{26}$ **2.5B** (a) $\left(5 - \sqrt{6}\right)/4$ (b) $-22/3$ (c) $2/9$ **2.5C** (a) $\sqrt{14}/98$ (b) e **2.5E** Em cada caso, olhamos a superfície na forma implícita $F(x, y, z) = 0$ e representamos o plano tangente e a reta normal pelos símbolos α_T e r_N, respectivamente.

(a) $\nabla F(P_0) = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\alpha_T : 2x + 2y - z = 4$, $r_N : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = -z$;
(b) $\nabla F(P_0) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\alpha_T : x + 2y + 3z = 6$, $r_N : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z-1}{6}$;
(c) $\nabla F(P_0) = \frac{43}{5}\vec{i} - \frac{24}{5}\vec{j} - \vec{k}$, $\alpha_T : 43x - 24y - 5z = 15$, $r_N : \dfrac{5(x-3)}{43} = \dfrac{5(y+4)}{24} = -z + 15$;
(d) $\nabla F(P_0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\alpha_T : x - 2y - 2z + 9 = 0$, $r_N : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-2}{4}$.

2.5F Para mostrar que a curva $\gamma(t)$ jaz no parabolóide $x^2 + y^2 + z = 1$, basta substituir as coordenadas de γ na equação do parabolóide e comprovar a identidade. O vetor $\vec{v}_T$ tangente à curva γ no ponto P_0 em questâo é $\vec{v}_T = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}$ e a reta tangente é, portanto, $x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t,\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t,\ z = -2t$. O plano normal passa no ponto P_0 e é ortogonal ao vetor $\vec{v}_T$. Sua equação é: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 4z = 2$.

2.5G (a) $\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$ (b) $\nabla f = 2e^{x^2+y^2}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$ (c) $\nabla f = (4x - z)\vec{i} + 4y\vec{j} - x\vec{k}$. Em (a) e (b) as curvas de nível são circunferências e o vetor tangente no ponto (x, y) é $\vec{v}_T = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Logo, $\nabla f \cdot \vec{v}_T = 0$.

2.5I Suponha as superfícies descritas implicitamente por $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$. O vetor tangente à curva interseção é $\vec{v}_T = \nabla F(P_0) \times \nabla G(P_0) = 80\vec{i} - 60\vec{j}$ e a derivada direcional é $\nabla w \cdot \vec{v}_T / \|\vec{v}_T\| = 0$.

2.5J Se $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ é uma direção unitária, então $D_{\vec{v}} f(0,0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(at, bt)}{t} = a^2 b$. Em particular, $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$. O erro da aproximação linear de f é $E(h, k) = h^2 k\left(h^2 + k^2\right)^{-1}$, de modo que $E/\sqrt{h^2 + k^2}$ não tem limite na origem e, conseqüentemente, f não é diferenciável em $(0, 0)$.

2.5L Se $w = f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ a Regra da Cadeia nos dá $w_x = \frac{x}{r} f'(r)$ e, por simetria, obtemos $w_y = \frac{y}{r} f'(r)$ e $w_z = \frac{z}{r} f'(r)$. Logo, $\nabla w = f'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$ e considerando $f(t) = t$, $f(t) = 1/t$ e $f(t) = \ln t$, obtemos, respectivamente: $\nabla r = \dfrac{\vec{r}}{r}$, $\nabla(1/r) = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ e $\nabla(\ln r) = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$.

Exercícios 2.6

2.6A A direção tangente à curva γ é $\vec{v}_T = \nabla F(P_0) \times \nabla G(P_0)$.
(a) $\vec{v}_T = -28\vec{i} + 34\vec{j} + 32\vec{k}$, $r_T : \dfrac{1-x}{28} = \dfrac{y-2}{34} = \dfrac{z+3}{32}$ (b) $\vec{v}_T = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$, $r_T : \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+2}{4} = -\dfrac{z}{6}$

2.6B A direção unitária é $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})$ e, assim, $D_{\vec{u}} w = \nabla w \cdot \vec{u} = -10/\sqrt{14}$

2.6C (a) $x = 2+t,\ y = 4+4t,\ z = 8+12t \quad \alpha : x+4y+12z$ (b) O vetor tangente à curva em um ponto genérico é $\vec{v}_T = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ e representando or P_2 o ponto de tangência, então a relação $\overrightarrow{P_1P_2} = \lambda\vec{v}_T$ nos dá $t = -1$ e o ponto P_2 é $(-1, 1-1)$. A reta tangente é: $x+1 = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z+1}{3}$ (c) Para mostrar que não há reta tangente pelo ponto $Q_1\,(0,-1,3)$, basta observar que o sistema $\overrightarrow{P_1P_2} = \lambda\vec{v}_T$ não tem solução.

2.6D A derivada direcional $D_{\vec{u}}g$ será máxima quando $\vec{u}$ apontar na direção do gradiente. Agora, basta observar que $\nabla g\,(x,y) = 2f'\left(x^2+y^2\right)\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)$ e que $\vec{v} = x\vec{i}+y\vec{j}$ aponta na direção de ∇g.

26E É suficiente provar que o plano tangente é do tipo $Ax+By+Cz=0$. No ponto $P\,(a,b)$ o plano tangente é: $z = z_x\,(P)\,(x-a) + z_y\,(P)\,(y-b) + z_0$, onde $z_0 = bf\,(a/b)$. A Regra da Cadeia nos dá $z_x\,(P) = f'\,(a/b)$ e $z_y\,(P) = f\,(a/b) - \frac{a}{b}f'\,(a/b)$ e o plano tangente é: $f'\,(a/b)\,x + [f\,(a/b) - \frac{a}{b}f'\,(a/b)]y - z = 0$.

2.6F Devemos ter $\nabla F\ //\ \vec{N}$ onde $\vec{N} = 10\vec{i}-7\vec{j}-2\vec{k}$. Resolvendo o sistema $\nabla F = \lambda\vec{N}$, encontramos o ponto de tangência $P_0\left(\frac{1}{2},-1,3\right)$ e o plano tangente é $10x-7y-2z=6$.

2.6G Da relação $\nabla F\cdot\overrightarrow{PQ} = 0$, encontramos $z = 4x$ e com $x = 1$ obtemos $z = 2$ e levando esses valores na superfície encontramos o ponto de tangência $P_0\,(1,\pm1,2)$. O problema agora é determinar o plano que passa por $P_0\,(1,1,2)$ e é perpendicular ao vetor $\nabla F\,(P_0) = 2\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$. Sua equação é: $2x+4y+4z=14$.

2.6H Usando o paralelismo entre os vetores ∇F e $\vec{v} = -3\vec{i}+8\vec{j}-\vec{k}$, este último vetor diretor da reta, encontramos o ponto de tangência $P_0\,(1/2,-2,-3/4)$. O plano procurado passa no ponto P_0 e é normal ao vetor $\vec{v}$. sua equação é: $12x-32y+4z=67$.

2.6I O ponto de tangência é determinado resolvendo o sistema $\nabla F = \lambda(3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$. Encontramos $P_0\,(-1/4,1/4,1/8)$ e o plano é: $3x+y+2z+5/8=0$.

2.6J Da relação $\nabla F\ //\ \vec{k}$, encontramos $x = 0$ e $y = -2$ e levando esses valores na superfície obtemos $z = 4$. O plano horizontal que passa no ponto $(0,-2,4)$ tem equação $z = 4$.

2.6K Temos que $\nabla F\,(P_0) = 2x_0\vec{i}+2y_0\vec{j}+2z_0\vec{k}$ e a reta normal em P_0 é: $x = x_0+2x_0t,\ y = y_0+2y_0t$ e $z = z_0+2z_0t$ e em $t = -1/2$, obtem-se o ponto $(0,0,0)$ da reta, o qual é o centro da esfera.

2.6L A temperatura $T\,(x,y)$ aumenta mais rapidamente na direção $\nabla T\,(1,1) = -50\vec{i}-50\vec{j}$, com velocidade $\|\nabla T\,(1,1)\| = 50\sqrt{2}$.

2.6M Recorde-se que $D_{\vec{v}}f\,(P)$ mede a variação de f em relação à distância s, medida na direção

$\vec{v}$. A taxa de variação de w, em relação ao tempo, é:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{ds}\frac{ds}{dt} = (\nabla w(P) \cdot T)\frac{ds}{dt}.$$

Exercícios 2.7

2.7A Nas tabela abaixo apresentamos os pontos críticos com a seguinte classificação: S (sela), mL (mínimo local) e ML (máximo local). Em alguns casos a existência ou não de extremos absolutos pode ser investigada por observação do limite da função.

	pontos críticos	natureza	mín. abs.	máx. abs.
(a)	$(0,0)$	S	não	não
(b)	$(0,0)$, $(4,-8)$ e $(-1,2)$	ML	não	não
(c)	$(0,0)$; $(1,0)$; $(0,1)$ e $(1/3,1/3)$	S, S, S e mL	não	não
(d)	$(0,0)$	mL	sim	não
(e)	$(-3/2,-1/2)$	mL	sim	não
(f)	$(-2,\sqrt{3})$ e $(-2,-\sqrt{3})$	mL e S	não	não
(g)	$(0,0)$	ML e Abs.	não	sim
(h)	$(\sqrt{3},1)$, $(\sqrt{3},-1)$, $(-\sqrt{3},1)$ e $(-\sqrt{3},-1)$	mL, S, S e ML	não	não
(i)	$(1/2,1/3)$	S, mL e mL	sim	não

2.7B $P(1/2,1/3)$ é um ponto de máximo absoluto de $z(x,y)$. A função $g(x,y) = 1/x - 1/y$ é contínua em D, mas não possui máximo nem mínimo.

2.7C Cada uma das funções é contínua e está definida em um conjunto compacto. A teoria nos ensina que ela tem ao menos um ponto de máximo e um ponto de mínimo absolutos.

	pontos de máximo	pontos de mínimo
(a)	$(1/2,\sqrt{2}/2)$ e $(-1/2,-\sqrt{2}/2)$	$(-1/2,\sqrt{2}/2)$ e $(1/2,-\sqrt{2}/2)$
(b)	$(1,1)$	$(-1,-1)$
(c)	$(1,0)$	$(3,0)$
(d)	$(-1,\pm\pi)$	$(1,\pm\pi)$
(e)	$(-1,0)$	$(1/2,0)$
(f)	$(0,-1)$ e $(0,2)$	$(1,1)$

2.7D $P_1(-1,0,1)$ e $P_2(-1,0,-1)$

2.7E Faça a análise por meio de limites.

(a) Não tem máximo nem mínimo absolutos.

(b) Não tem mínimo absoluto. A origem é um ponto de máximo, onde a função atinge o valor 1.

(c) Não tem máximo absoluto. Os pontos $P_k(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + k\pi)$ e $Q_k(-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$ são pontos de mínimo absoluto, onde a função atinge o valor -2.

2.7G $P_1\,(1,-1,1)$ e $P_2\,(-1,1,1)\,;\ d = \sqrt{3}$ **3.7** $P\,(1,0)$; $d = 1$.

2.7H

	pontos de máximo	pontos de mínimo
(a)	$(3/5, 4/5)$	$(-3/5, -4/5)$
(b)	$(\pi/8, -\pi/8)$	$(5\pi/8, 3\pi/8)$
(c)	não há	$(4, 4)$
(d)	$(\pm\sqrt{3}/3, \pm\sqrt{3}/3, \pm\sqrt{3}/3)$	pontos da curva $x+y+z=0;\ x^2+y^2+z^2=1$
(e)	$(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$	$(\pm 1/\sqrt[4]{2}, \pm 1/\sqrt[4]{2})$
(f)	$(\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$	$P\,(x,y,z)$ tal que $x=0$, ou $y=0$ ou $z=0$
(g)	$(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	$(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$
(h)	$(\pm\sqrt{6/11}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{6/11}, \pm\frac{1}{3}\sqrt{6/11})$	pontos do plano $x+y+z=0$
(i)	não há	$(6/19, 1/19)$

2.7I $d = 1$ **2.7J** $P_1\,(1/4, 1/4)$ e $P_2\,(-1/4, -1/4)$; $d = \sqrt{2}/4$

2.7K $P_1(0, 1/\sqrt{68}, -4/\sqrt{68})$ e $P_2(0, -1/\sqrt{68}, 4/\sqrt{68})$; $d = 0.25$ **2.7L** $x = \alpha/3,\ y = \alpha/3$ e $z = \alpha/3$

2.7M Pelo exercício 3.12 o ponto do plano $x+y+z=a$, onde xyz atinge o maior valor é $(a/3, a/3, a/3)$. Logo, $xyz \le \alpha^3/27$.

2.7N $P\,(1,-2,5)$ **2.7O** $P(8/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$; $d = \sqrt{10}(\sqrt{5}-1)$

2.7P $f\,(\pi/3, \pi/3) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ **2.7Q** Máximo no ponto $M\,(1,0)$ e mínimo no ponto $m\,(1/4, 1/2)$

2.7R O maior valor da expressão $x\,(y+z)$ é 1 e ocorre quando $x = \sqrt{2}/2,\ y = \sqrt{2}/2$ e $z = \sqrt{2}$, ou $x = -\sqrt{2}/2,\ y = -\sqrt{2}/2$ e $z = -\sqrt{2}$

2.7S $P\,(1/6, 1/3, 355/36)$ **2.7T** $P_1\,(1,1,1)\,,\ P_2\,(1,-1,-1)\,,\ P_3\,(-1,1,1)$ e $P_4\,(-1,-1,-1)$

2.7U $d = 11\sqrt{2}/8$ **2.7V** $d = 1427/168$ **2.7W** $\max(\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3})$; $\min(\pm 1, \pm 1)$

Exercícios 2.8

2.8A $T_M = 3/2$ nos pontos $\left(\pm\sqrt{3}/2, -1/2\right)$ e $T_m = -1/4$ no ponto $(0, 1/2)$.

2.8B $T_M = \dfrac{1600}{9}$ nos pontos $\left(\pm\sqrt{2/3}, \pm 2\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}\right)$; $T_m = 0$ nos pontos dos círculos

$$c_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \qquad c_2 : \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases} \qquad c_3 : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

2.8C $x = 4$, $y = 4$ e $z = 2$ **2.8D** $V = 8abc/3\sqrt{3}$

2.8E Os coeficientes da reta $y = ax+b$ que melhor se ajusta aos dados são obtidos minimizando a função $E(a, b) = (a + b - 3)^2 + (2a + b - 7)^2 + (3a + b - 8)^2$.

2.8F $P(14/3, 11/3)$. A regressão linear é, nesse caso: $y = \dfrac{-2x}{19} + \dfrac{237}{57}$.

2.8G A Regressão Linear é $y = (1.23)\,x - 1.81$, onde x representa a média semestral e y a nota do exame final. Quando $x = 7.0$, encontra-se $y = 6.8$.

2.8H $V(3, 4, 12)$ **2.8K** $\theta = \pi/6$, $x = \dfrac{12\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{6(1 + \sqrt{3})}{3 + 2\sqrt{3}}$ e $z = \dfrac{12}{3 + 2\sqrt{3}}$

2.8L Base quadrada de lado $\sqrt[3]{4}$ e altura $2\sqrt[3]{4}$ **2.8M** o retângulo de lados $x = 2a^2/\sqrt{a^2 + b^2}$ e $y = 2b^2/\sqrt{a^2 + b^2}$ **2.8N** $H = \dfrac{10}{\pi} - \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ e $h = 5$

2.8O $P(4/3, 4/3)$ **2.8Q** largura $x = 4/\sqrt{3}$; profundidade $y = 4$.

Exercícios 2.9

2.9A (a) $y' = -3$ e $y' = -62$ (b) $y' = -2/3$ e $y' = 23/27$ (c) $y' = -1$ e $y' = -3$ (d) $y' = -1$ e $y' = 2$ **2.9B** (a) $x' = 0$ e (b) $x' = 0$ **2.9C** (a) $z_x = -x/z$; $z_y = -y/z$ (b) $z_x = \left(y + 2xy + y^2\right)/2z$; $z_y = \left(x + 2xy + x^2\right)/2z$ (c) $z_x = z^2/(\operatorname{sen} z + 3y - 2xz)$; $z_y = 3z/(2xz - 3y - \operatorname{sen} z)$ **2.9D** $u = 2\operatorname{sen}(xy) - x^2 - y^2$, $v = -3\operatorname{sen}(xy) + x^2 + y^2$ **2.9G** (a) $J = 9$ (b) $J = -5$ (c) $J = 5e^x + 1$ (d) $J = r$ (e) $J = -3$ (f) $J = 2\left(x^2 - 2y\right)\cos y - 2\left(x^2 - y\right)\operatorname{sen} y$ (g) $J = r$ (h) $J = -\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ **2.9J** Use as relações $v_x = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(v, y)}$ e $v_y = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}$ para deduzir que $v_x = 4$ e $v_y = 2$ **2.9K** Temos que $J = \dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = -9$

e usando as fórmulas de derivação encontramos: $x_t = -2/3$, $x_s = 2/3$, $y_t = -14/9$ e $y_s = 4/9$

2.9L (a) $J(T) = -15e^x y^2$; $J\left(T^{-1}\right) = -1/15e^x y^2$, nos pontos onde $y \neq 0$ (b) Em $x = 0$ e $y = 1$ temos $J = -15$ e, portanto, $x_u = \frac{1}{J} v_y = \frac{6}{15}$ e $y_v = \frac{1}{J} u_x = \frac{-1}{15}$ **2.9R** A elipse $\dfrac{u^2}{16} + v^2 = a^2$ **2.9S** O círculo $u^2 + v^2 = e^{2c}$ **2.9T** O quadrado de vértices $A(1/2, 1/2)$, $B(1/2, 1)$, $C(1, 1/2)$ e $D(1, 1)$ **2.9U** A região $|x| + |y| \leq 1$ é transformada no quadrado $R_{uv} : [-1, 1] \times [-1, 1]$ do plano uv **2.9X** (a) o retângulo de vértices $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(6, 5)$ e $(0, 5)$ (b) a elipse $x^2/9 + y^2/25 = 1$ (c) o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$ (d) a reta $4u - 9v = 1$ (e) a reta $u - 3v + 5 = 0$ (f) o paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(1, 5)$, $(10, 4)$ e $(9, -1)$ (g) a elipse $13u^2 + 41v^2 + 4uv = 529$.

Exercícios 2.10

2.10A

cartesianas: (x, y, z)	cilíndricas: (r, θ, z)	esféricas: (ρ, θ, φ)
$(2, 2, -1)$	$(2, \pi/4, -1)$	$(3, \pi/4, 5\pi/6)$
$(3\sqrt{6}, 3\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$	$(6\sqrt{2}, \pi/6, -6\sqrt{2})$	$(12, \pi/6, 3\pi/4)$
$(1, 1, -\sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \pi/4, -\sqrt{2})$	$(2, \pi/4, 3\pi/4)$
$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$	$(1, \pi/4, 1)$	$(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/4)$

2.10B (a) o círculo $x^2 + y^2 = 16$ (b) o par de planos $(x - y)(x + y) = 0$ (c) a folha superior do cone $z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$ (d) o elipsóide $9x^2 + 9y^2 + 3z^2 = 27$ (e) a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (f) o cilindro circular reto $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ **2.10C** (a) a esfera de centro $(3, 0, 0)$ e raio 3 (b) o cilindro circular reto de raio 5 (c) os planos $x \pm \sqrt{3}y = 0$ (d) o plano $z = 4$ (e) o cone $x^2 + y^2 = z^2$ (f) a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, juntamente com a origem (g) o plano $x = 1$ (h) a esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$ (i) um par de palnos (j) a esfera de centro na origem e raio a (k) a região entre as esferas de raios 1 e 2 centradas na origem (l) o parabolóide $z = x^2 + y^2$

2.10D

(a) Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$	$r^2 + z^2 = 4$	$\rho = 2$
(b) Parabolóide: $4z = x^2 + y^2$	$4z = r^2$	$\rho = 4 \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{cosec} \varphi$
(c) Cone: $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$	$r^2 - 4z^2 = 0$	$\operatorname{tg} \varphi = 2$
(d) Hiperbolóide: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$	$r^2 - z^2 = 1$	$\rho^2 \cos 2\varphi = 1$
(e) Plano: $3x + y - 4z = 0$	$4z = r\,(3\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$	$(3\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \operatorname{tg}\varphi = 1$
(f) Cilindro: $x^2 + y^2 = 4$	$r = 2$	$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = 4$

2.10E Considere $F(x, y, u, v) = x^2 + y^2 u - v = 0$ e $G(x, y, u, v) = x + y^2 - u = 0$ e represente por J o Jacobiano $J = \dfrac{\partial (F, G)}{\partial (x, y)}$.

(a) As fórmulas de derivação implícita nos dá: $x_u = -\dfrac{1}{J} \dfrac{\partial (F, G)}{\partial (u, y)}$ e $y_v = -\dfrac{1}{J} \dfrac{\partial (F, G)}{\partial (x, v)}$.

(b) Resolvendo o sistema $(*)$ encontramos, por exemplo:

$$x = \frac{1}{2}\left(u - \sqrt{4v - 3u^2}\right) \text{ e } y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{u + \sqrt{4v - 3u^2}}.$$