

Capítulo 6

Equações Diferenciais

6.1 Definições Básicas

Equação diferencial é uma equação onde aparecem uma função e suas derivadas. Por exemplo, $f'(x) + f(x) = \cos(x)$ e $y'' - 4y' + 5y + 3 = x^3 + 3x$ são exemplos de equações diferenciais.

Uma *solução* (exata) para uma equação diferencial é uma função que torna a equação uma sentença verdadeira para quaisquer valores das variáveis quando a função é substituída na equação. Por exemplo, $y = e^{3x}$ é uma solução da equação $y' - 3y = 0$ porque, ao substituirmos y na equação, obtemos $0 = 0$ após a simplificação.

Uma equação diferencial é denominada *ordinária* se a função envolvida possuir apenas uma variável. Se a função tiver várias variáveis, então a equação chama-se *parcial*.

A *ordem* de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que aparecer na equação. Por exemplo, $y''' - y'' + 5y = x^5 + 2x - 1$ é uma equação diferencial ordinária de terceira ordem.

Um *problema de valor inicial* (PVI) é uma equação diferencial com mais algumas condições iniciais do tipo $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y'(x_0)$, etc. A quantidade de condições iniciais fornecidas depende da ordem da equação.

Em geral, a determinação da solução exata de uma equação diferencial envolve o cálculo de uma ou várias primitivas. Por isso, na maioria dos casos, o cálculo da solução exata é difícil ou impossível de ser realizado utilizando-se apenas as conhecidas funções elementares (trigonométricas, logarítmicas, hiperbólicas, polinomiais, etc.). Até mesmo equações de aparência muito simples podem ser impossíveis de se resolver de forma exata. Por exemplo, ninguém consegue determinar a solução exata de $y' = x^2 + y^2$ usando só as funções elementares conhecidas – note que é até difícil imaginar um problema de aparência tão simples!

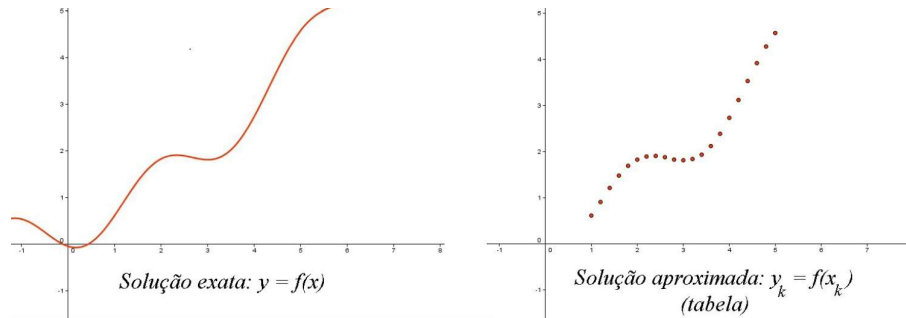
A resolução de equações diferenciais é um problema importantíssimo porque possui aplicações a diversas áreas do conhecimento tais como Matemática Aplicada, Física, Engenharia e Computação Gráfica.

Devido à impossibilidade de se determinar a solução exata na maioria dos casos, desenvolveram-se técnicas de determinação de solução numérica aproximada da equação.

A resolução numérica aproximada não envolve cálculo de primitivas. Envolve apenas uma

sequência de passos onde são usados operações aritméticas básicas e cálculo de valores de funções. Neste caso, não se determina uma função, mas uma tabela de valores de pontos que devem estar muito próximos do gráfico da função que seria a solução da equação.

Neste capítulo, estudaremos apenas um único tipo de PVI: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.



Uma solução exata de um PVI do tipo $y' = f(x, y)$, $y_0 = y(x_0)$ é uma função derivável cujo gráfico passa pelo ponto (x_0, y_0) . Uma solução aproximada é uma tabela de valores que inicia com (x_0, y_0) , próximos do gráfico da função que seria a solução da equação.

6.2 Método de Euler

O método mais simples para se encontrar pontos (x_n, y_n) próximos do gráfico da solução do PVI $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ é o *método de Euler*, elaborado pelo famoso matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).



A obtenção da fórmula que define esse método é bem simples e consiste apenas em utilizar a definição de derivada da função $y(x)$ no ponto em que $x = x_n$:

$$y'(x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h}.$$

Portanto, se h for próximo de 0, temos a aproximação

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h},$$

de onde podemos isolar $y(x_n + h)$ como sendo:

$$y(x_n + h) \approx hy'(x_n) + y(x_n).$$

Lembrando que a equação em estudo é $y' = f(x, y)$, temos que a aproximação citada anteriormente é o mesmo que

$$y(\underbrace{x_n + h}_{x_{n+1}}) \approx hf(x_n, y_n) + \underbrace{y(x_n)}_{y_n}.$$

Observando a aproximação anterior, definimos: $x_{n+1} = x_n + h$, $y_n = y(x_n)$ e $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$.

Dessa forma, a aplicação do método de Euler para o citado PVI, consiste em, a partir do ponto inicial (x_0, y_0) dado, ir calculando vários pontos (x_n, y_n) , utilizando as fórmulas $x_{n+1} = x_n + h$ e $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$.

Exemplo 6.1 Considerando $y(x)$ como sendo a solução do problema de valor inicial $y' = y + 2x - x^2$, $y(0) = 1$, calcule $y(0, 5)$ usando o método de Euler com $h = 0, 1$.

Solução:

- São dados que $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0, 1$ e $f(x, y) = y + 2x - x^2$. Lembre-se de que neste capítulo todas as equações resolvidas são do tipo $f(x, y) = y'$.
- Usando a fórmula $x_{n+1} = x_n + h$ com $n = 0, 1, 2, \dots$ obtemos que $x_1 = x_0 + h = 0 + 0, 1 = 0, 1$, $x_2 = x_1 + h = 0, 1 + 0, 1 = 0, 2$, $x_3 = x_2 + h = 0, 2 + 0, 1 = 0, 3$, $x_4 = x_3 + h = 0, 4$ e $x_5 = x_4 + h = 0, 5$. Paramos em x_5 porque no enunciado da questão é perguntado pelo valor de $y(0, 5) = y(x_5)$.
- Calculamos agora y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 usando várias vezes a fórmula $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ com $n = 0, 1, 2, \dots$
- $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0, 1 \cdot f(0, 1) = 1 + 0, 1 \cdot (1 + 2 \cdot 0 - 0^2) = 1, 100$
- $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1, 1 + 0, 1 \cdot f(0, 1, 1, 1) = 1, 1 + 0, 1 \cdot (1, 1 + 2 \cdot 0, 1 - 0, 1^2) = 1, 229$
- $y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1, 229 + 0, 1 \cdot f(0, 2, 1, 229) = 1, 388$
- $y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1, 388 + 0, 1 \cdot f(0, 3, 1, 388) = 1, 578$
- $y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 1, 578 + 0, 1 \cdot f(0, 4, 1, 578) = 1, 799$

Concluimos assim que $y(0, 5)$ é aproximadamente igual a 1, 799.

Observações:

- Note que obtivemos cinco pontos (x_k, y_k) com $k = 1, 2, 3, 4, 5$, próximos do gráfico da solução da equação.
- O valor de h deve ser escolhido próximo de 0. Quanto mais próximo de 0, melhor será a precisão dos valores obtidos. No entanto, quanto menor o h , maior o tempo gasto na resolução.

Por uma questão meramente organizacional, os dados obtidos podem ser dispostos em forma de tabela:

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$
0	0,0	1,000	1,000
1	0,1	1,100	1,290
2	0,2	1,229	1,589
3	0,3	1,388	1,898
4	0,4	1,578	2,218
5	0,5	1,799	—

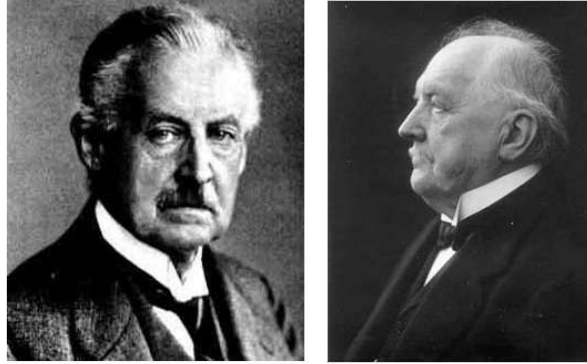
A utilidade dos valores da coluna $f(x_n, y_n)$ é só na hora de calcular a linha seguinte. Por isso, a última linha e última coluna pode ficar em branco.

Observação:

- O problema deste exemplo é muito simples e, por causa disso, sua solução exata pode ser calculada usando-se uma técnica conveniente: $y(x) = x^2 + e^x$.
- Usando essa função, podemos calcular os pontos que realmente estão sobre o gráfico da solução: $(x_n, y(x_n))$ com $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e a distância entre cada um desses pontos e os (x_n, y_n) da tabela fornecem os erros nos cálculos de cada ponto.
- Por exemplo, para o ponto aproximado $(x_5, y_5) = (0, 5, 1, 799)$, temos o ponto $(x_5, y(x_5)) = (0, 5, 1, 899)$ sobre o gráfico de $y(x)$. O erro cometido é igual à distância entre esses pontos que é $\varepsilon = |1, 799 - 1, 899| = 0, 100$.

6.3 Método de Runge-Kutta

O método mais famoso para resolução numérica de equações diferenciais foi elaborado pelos matemáticos alemães Carl David Runge (1856–1927) e Martin Wilhelm Kutta (1867–1944).



O método elaborado por essa dupla no início do século XX é um método simples e bastante eficiente.

O método de Euler para resolução do PVI $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ consiste na aplicação das fórmulas $x_{n+1} = x_n + h$, $y_{n+1} = y_n + k_1$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, onde $k_1 = hf(x_n, y_n)$ e h é próximo de 0. O método de Runge-Kutta é um aperfeiçoamento do método de Euler e consiste em somar ao y_n não apenas um valor de k_1 , mas uma média de vários valores de k_1, k_2, k_3, \dots

Não vamos apresentar aqui uma demonstração completa do método. Os casos mais simples podem ser encontrados demonstrados em livros como a referência bibliográfica [7].

6.3.1 Método de Runge-Kutta de 2ª ordem (RK2)

Dados $h > 0$ próximo de 0 e um PVI $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, calculam-se para $n = 0, 1, 2, \dots$ os seguintes valores:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1 + k_2}{2}\end{aligned}$$

onde $k_1 = hf(x_n, y_n)$ e $k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$.

Para cada valor inteiro de n , a partir de $n = 0$, calculam-se:

$$x_{n+1} \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow y_{n+1}$$

Repete-se essa sequência de cálculos várias vezes, até chegar no valor de y_n desejado.

6.3.2 Método de Runge-Kutta de 3ª ordem (RK3)

Dados $h > 0$ próximo de 0 e um PVI $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, calculam-se para $n = 0, 1, 2, \dots$ os seguintes valores:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1 + 4k_2 + k_3}{6}\end{aligned}$$

onde $k_1 = hf(x_n, y_n)$, $k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$ e $k_3 = hf(x_n + h, y_n - k_1 - 2k_2)$.

Para cada valor inteiro de n , a partir de $n = 0$, calculam-se:

$$x_{n+1} \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow k_3 \rightarrow y_{n+1}$$

Repete-se essa sequência de cálculos várias vezes, até chegar no valor de y_n desejado.

6.3.3 Método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4)

Dados $h > 0$ próximo de 0 e um PVI $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, calculam-se para $n = 0, 1, 2, \dots$ os seguintes valores:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

onde $k_1 = hf(x_n, y_n)$, $k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$, $k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$ e $k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$.

Para cada valor inteiro de n , a partir de $n = 0$, calculam-se:

$$x_{n+1} \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow k_3 \rightarrow k_4 \rightarrow y_{n+1}$$

Repete-se essa sequência de cálculos várias vezes, até chegar no valor de y_n desejado.

Exemplo 6.2 Seja $y(x)$ a solução do PVI $yy' + 2x - y^2 = 0, y(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$. Usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $h = 0,1$, calcule $y(1)$.

Solução: Na equação dada, isolamos o valor de y' e obtemos $f(x, y)$:

$$y' = y - \frac{2x}{y} = f(x, y)$$

A partir de $x_0 = \frac{1}{2} = 0,5$ e $y_0 = \sqrt{2} = 1,4142136$ dados, calculamos x_1, k_1, k_2, k_3, k_4 e y_1 :

- $x_1 = x_0 + h = 0,5 + 0,1 = 0,6$
- $k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0,1 \cdot f(0,5, 1,4142136) = 0,1 \cdot 0,7071068 = 0,0707107$
- $k_2 = h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = 0,1 \cdot 0,6907226 = 0,0690723$
- $k_3 = h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = 0,1 \cdot 0,6894743 = 0,0689474$
- $k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0,1 \cdot 0,6740782 = 0,067408$
- $y_1 = y_0 + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = 1,4142136 + 0,0690263 = 1,4832399$

A partir desses resultados, calculamos x_2, k_1, k_2, k_3, k_4 e y_2 . Depois, calculamos $x_3, k_1, k_2, k_3, k_4, y_3$, etc. Prosseguimos até obtermos $x_5 = 1$ e o seu respectivo y_5 . Paramos aí porque no enunciado é perguntado qual é o valor de $y(1) = y(x_5)$.

Organizamos todos os cálculos realizados em formato de tabela, mostrada a seguir.

n	x_n	k_1	k_2	k_3	k_4	y_n
0	0,5	0,0707107	0,0690723	0,0689474	0,0674078	1,4142136
1	0,6	0,0674200	0,0659967	0,0658853	0,0645389	1,4832399
2	0,7	0,0645498	0,0631983	0,0631982	0,0620077	1,5491938
3	0,8	0,0620174	0,0609058	0,0608153	0,0597528	1,6124522
4	0,9	0,0597616	0,0587656	0,0586831	0,0577272	1,6733209
5	1,0	—	—	—	—	1,7320519

Portanto, $y(1) \approx 1,7320519$. Não há necessidade de calcular os valores de k_1 , k_2 , k_3 e k_4 da última linha porque esses valores só teriam utilidade se a tabela fosse continuar, calculando-se o y_6 .

Observação:

Neste caso, usando-se uma técnica adequada de resolução de equações diferenciais, é possível encontrar a solução exata $y(x) = \sqrt{2x + 1}$ do PVI dado

$$y' = y - \frac{2x}{y}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Logo, o valor exato de $y(1)$ é $\sqrt{3} = 1,7320508$. Daí, o erro da aproximação encontrada é $\varepsilon = |y_5 - \sqrt{3}| = 1,1 \cdot 10^{-6}$. Isso mostra que o método RK4, como sempre, forneceu um valor bastante preciso.

6.4 Exercícios Propostos

(P47) Usando o método de Euler com $h = 0,2$, determine $y(2,2)$ sabendo que $y(x)$ é solução do PVI:

$$\frac{x}{2} + y' = y^2 + 3, \quad y(1,2) = 1$$

Resp.: 26,8697

(P48) Usando o método de Runge-Kutta de 2ª ordem com $h = 0,1$, determine $y(1,3)$ para o PVI

$$y^2 = y' - x - \frac{3}{25}, \quad y(1) = 2,35$$

Resp.: 6,9092

(P49) Usando o método de Runge-Kutta de 3ª ordem com $h = 0,15$, determine $y(1,3)$ para o PVI

$$2y = 5y' - x^2 + \frac{7}{50}, \quad y(1) = 4,8$$

Resp.: 5,4591

(P50) a) Usando o método de Runge-Kutta de 3ª ordem com $h = 0,2$ calcule $y(1)$ sabendo que $y(x)$ é solução de

$$2x + yy' = y^2, \quad y(0) = 1$$

b) Sabendo que a solução exata do PVI do item (a) é $y = \sqrt{2x + 1}$, calcule o erro absoluto cometido na aproximação de $y(1)$. **Resp.: $y(1) = 1,3863$, $\varepsilon = 0,3456$**

(P51) Considerando o PVI

$$y' - 5y = 3x^2 - 10, \quad y(3) = 1$$

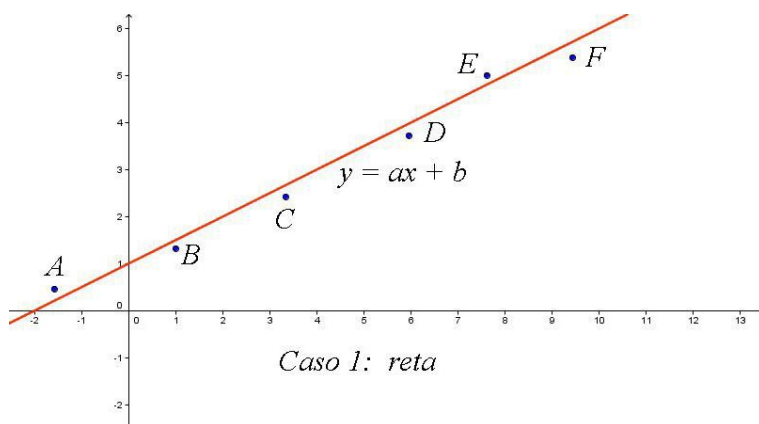
e usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $h = 1/4$, calcule $y(4)$. **Resp.: $730,8669$**

Capítulo 7

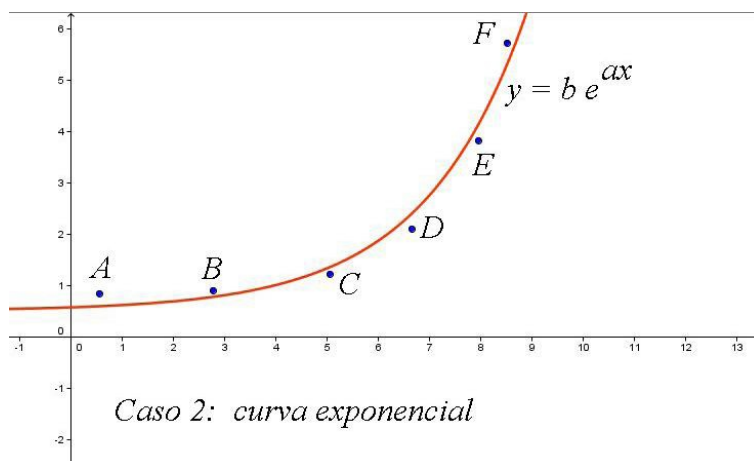
Método dos Mínimos Quadrados

7.1 Introdução

Dado um conjunto de pontos do plano A, B, C, D, \dots neste capítulo estamos interessados em encontrar a equação de uma curva $y = f(x)$ cujo gráfico passe o mais próximo possível de todos esses pontos. Neste caso, dizemos que a curva se ajusta aos pontos dados. Por exemplo, se os pontos dados forem “quase colineares”, podemos querer encontrar a equação da reta $y = ax + b$ que passa perto deles.



Mas, nem sempre os pontos dados podem ser “quase colineares”. Às vezes, eles podem sugerir outros formatos como o de curvas exponenciais, parábolas, hipérbolas, senóides, etc. Por exemplos, os pontos A, B, C, \dots da figura a seguir, sugerem um formato de curva exponencial $y = be^{ax}$.



Normalmente, os pontos A, B, C, \dots são dados em forma de tabela. As fontes desses dados podem ser as mais diversificadas:

- Podem ser provenientes de experiências realizadas em um laboratório de Física (por exemplo, medição de velocidade em função do tempo $v = v_0 + at$);
- Podem ser provenientes de experiências realizadas em um laboratório de Química;
- Podem ser dados referentes ao crescimento da população de uma cidade (crescimento exponencial);
- Podem ser dados referentes ao crescimento do número de computadores conectados à Internet (crescimento exponencial);
- etc.

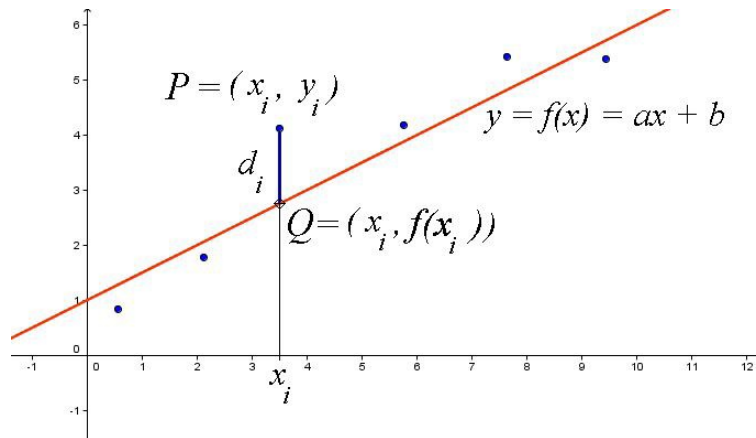
A utilidade de uma equação $y = f(x)$ relacionada aos dados é que se pode, a partir dela, fazer previsões de novos valores que não são fornecidos diretamente.

7.2 Desvio de um ponto com relação a uma curva

Dada a equação de uma curva $y = f(x)$ e um ponto do plano $P = (x_i, y_i)$, definimos o desvio de P com relação ao gráfico de $f(x)$ como sendo

$$d_i = y_i - f(x_i)$$

O d_i assim definido será positivo se $y_i > f(x_i)$, será negativo se $y_i < f(x_i)$ e será nulo se P pertencer ao gráfico. O módulo de d_i corresponde à distância na direção vertical do ponto ao gráfico da função.



7.3 Desvio total

Vamos definir agora uma função D que permita medir o quanto um conjunto de pontos esteja se afastando de uma curva cuja equação é dada.

Dados n pontos (x_i, y_i) , definimos o desvio total D desses pontos com relação ao gráfico de $y = f(x)$ como sendo a soma dos quadrados de todos os desvios d_i calculados em cada ponto:

$$D = \sum_{i=1}^n d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2.$$

Observação:

Se não tivessem sido usados os quadrados na definição de desvio total, alguns desvios negativos poderiam cancelar os desvios positivos no cálculo do somatório. Por causa disso, correríamos o risco de ter um desvio total nulo com pontos acima e pontos abaixo do gráfico da função – o que poderia levar à interpretação equivocada de que os pontos pertenceriam ao gráfico.

Exemplo 7.1 Calcule o desvio total dos pontos

x_i	1,0	2,0	2,5	3,8	6,0
y_i	-1,0	0,5	2,1	4,5	8,8

com relação à reta de equação $y = f(x) = 2x - 3$.

Os desvios em cada ponto são dados por:

- $d_1 = y_1 - f(x_1) = -1 - f(1) = -1 - (-1) = 0$,
- $d_2 = y_2 - f(x_2) = 0,5 - f(2) = 0,5 - 1 = -0,5$,
- $d_3 = y_3 - f(x_3) = 2,1 - f(2,5) = 2,1 - 2 = 0,1$,

- $d_4 = y_4 - f(x_4) = 4,5 - f(3,8) = 4,5 - 4,6 = -0,1$,
- $d_5 = y_5 - f(x_5) = 8,8 - f(6) = 8,8 - 9 = -0,2$.

O desvio total é dado por

$$D = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 0 + 0,25 + 0,01 + 0,01 + 0,04 = 0,31.$$

Como o desvio total é próximo de 0, concluímos que a reta dada passa perto dos pontos dados.

7.4 Caso linear

Dados n pontos (x_i, y_i) , vamos determinar a e b de tal forma que a reta $y = f(x) = ax + b$ se aproxime do conjunto de pontos o máximo possível.

Neste caso, o desvio total desses pontos com relação a $f(x)$ é

$$D = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

o que mostra que D depende de a e de b .

Para a reta ser próxima dos pontos dados, o desvio total D deve ser mínimo. Como D depende de a e b , então as derivadas $\frac{\partial D}{\partial a}$ e $\frac{\partial D}{\partial b}$ devem ser nulas:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \sum_{i=1}^n [2(y_i - ax_i - b)(-x_i)] = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = \sum_{i=1}^n [2(y_i - ax_i - b)(-1)] = 0$$

As duas igualdades anteriores são equivalentes a

$$2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i) = 0$$

$$2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0$$

Dividindo por 2 e separando cada somatório em somatórios menores, obtemos

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i - \sum x_i y_i = 0$$

$$a \sum x_i + \sum b - \sum y_i = 0$$

Usamos \sum significando o mesmo que $\sum_{i=1}^n$.

Como $\sum b = \underbrace{b + b + \dots + b}_{n \text{ parcelas}} = nb$, temos que a e b são calculados resolvendo-se o sistema linear

$$\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i y_i = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + nb = \sum y_i \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema linear anterior, determinamos os valores de a e b :

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

$$b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n}.$$

Assim, dados n pontos (x_i, y_i) , para encontrar a reta $y = ax + b$ que mais se aproxima deles, procedemos da seguinte forma:

- Calculamos os quatro somatórios $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i^2$ e $\sum x_i y_i$.
- Usamos as fórmulas acima e calculamos os coeficientes a e b da reta.

Este procedimento é denominado *método dos mínimos quadrados*.*

Observação:

O somatório $\sum x_i^2$ não deve ser confundido com $(\sum x_i)^2$, nem $\sum x_i y_i$ com $\sum x_i \sum y_i$.

Exemplo 7.2 Determine a reta $y = ax + b$ que mais se aproxima dos pontos

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y_i	2,4	4,1	4,8	6,0	6,8

segundo o método dos mínimos quadrados.

Solução: São 5 os pontos (x_i, y_i) dados na tabela. Logo, $n = 5$. Calculando os quatro somatórios que aparecem nas fórmulas anteriores:

- $\sum x_i = 1,0 + 1,5 + 2,0 + 2,5 + 3,0 = 10,0$
- $\sum x_i^2 = 1,0^2 + 1,5^2 + 2,0^2 + 2,5^2 + 3,0^2 = 22,5$
- $\sum y_i = 2,4 + 4,1 + 4,8 + 6,0 + 6,8 = 24,1$

*conhecido na Estatística pelo nome de *regressão linear*

$$\bullet \sum x_i y_i = 1,0 \cdot 2,4 + 1,5 \cdot 4,1 + 2,0 \cdot 4,8 + 2,5 \cdot 6,0 + 3,0 \cdot 6,8 = 53,55$$

Finalmente, obtemos

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{5 \cdot 53,55 - 10,0 \cdot 24,1}{5 \cdot 22,5 - (10,0)^2} = 2,14$$

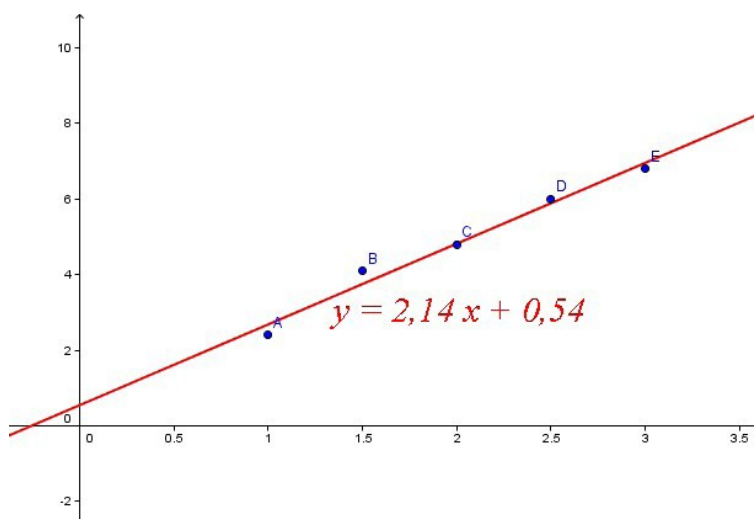
e

$$b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n} = \frac{24,1 - 2,14 \cdot 10,0}{5} = 0,54.$$

Dessa forma, a reta que mais se aproxima dos cinco pontos dados é

$$y = 2,14x + 0,54.$$

Abaixo, temos o gráfico da reta encontrada, com todos os pontos dados.



Se calcularmos o desvio total dos pontos dados com relação à reta, obtemos $D = 0,239$.

7.5 Redução ao caso linear

As fórmulas que fornecem os coeficientes da reta dos mínimos quadrados pode ser aplicadas a diversos tipos de outras funções, se for feita antes mudanças de variáveis para transformar as diversas equações na equação de uma reta. Algumas dessas funções são:

- $y = be^{ax}$ (função exponencial de base e)
- $y = ba^x$ (função exponencial com base qualquer)
- $y = bx^a$ (função potencial)
- $y = ax^2 + b$ (função quadrática)

- $y = \frac{1}{ax+b}$ (função racional)
- $y = \sqrt{ax+b}$ (função irracional)
- $y = \frac{c}{1+be^{-ax}}$ (função de crescimento logístico)

Exemplo 7.3 Determine a curva $y = be^{ax}$ que mais se aproxima dos pontos

x_i	0,5	1,0	1,5	1,7	2,3
y_i	2,5	3,3	4,3	4,8	6,2

segundo o método dos mínimos quadrados.

Solução: Devemos fazer uma tentativa de mudar as variáveis para transformar a equação dada na equação de uma reta. Se conseguirmos, usamos fórmulas anteriores para calcularmos os valores de a e b .

Em toda equação que apareça alguma exponencial, pode ser uma boa idéia aplicar **logaritmos** aos dois membros da equação para ver o que acontece: $y = be^{ax} \Rightarrow \ln y = \ln(be^{ax}) \Rightarrow \ln y = \ln b + \ln(e^{ax}) \Rightarrow \ln y = \ln b + ax \underbrace{\ln e}_{=1} \Rightarrow \ln y = ax + \ln b$.

Na equação obtida, $\ln y = ax + \ln b$, fazemos as seguintes mudanças de variáveis $Y = \ln y$ e $B = \ln b$ e, com isso, obtemos: $Y = ax + B$ que é a equação de uma reta nas novas variáveis, conforme queríamos.

A variável y está associada aos dados y_i da tabela. Logo, se mudamos o y para $Y = \ln y$, os y_i também devem acompanhar essa mudança, ou seja, devemos aplicar logaritmos a eles. Obtemos dessa forma uma nova tabela, construída a partir da tabela dada:

x_i	0,5	1,0	1,5	1,7	2,3
Y_i	0,9163	1,1939	1,4586	1,5686	1,8245

Observe que nenhuma modificação foi feita nos valores de x_i porque não há mudança de variável envolvendo o x .

Os dados da tabela anterior estão associados à equação da reta $Y = ax + B$. Logo, podemos calcular os coeficientes a e B através de fórmulas já vistas anteriormente. Para isso, precisamos calcular os quatro seguintes somatórios:

- $\sum x_i = 0,5 + 1,0 + 1,5 + 1,7 + 2,3 = 7,0$
- $\sum x_i^2 = 0,5^2 + 1,0^2 + 1,5^2 + 1,7^2 + 2,3^2 = 11,68$
- $\sum x_i Y_i = 0,5 \cdot 0,9163 + 1,0 \cdot 1,1939 + 1,5 \cdot 1,4586 + 1,7 \cdot 1,5686 + 2,3 \cdot 1,8245 = 10,7031$
- $\sum Y_i = 0,9163 + 1,1939 + 1,4586 + 1,5686 + 1,8245 = 6,9620$

A partir daí, podemos calcular a e B usando as conhecidas fórmulas:

$$\bullet a = \frac{n \sum x_i Y_i - \sum x_i \sum Y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{5 \cdot 10,7031 - 7,0 \cdot 6,9620}{5 \cdot 11,68 - 7,0^2} = 0,5087$$

$$\bullet B = \frac{\sum Y_i - a \sum x_i}{n} = \frac{6,9620 - 0,5087 \cdot 7,0}{5} = 0,6803.$$

Como $B = \ln b$, temos que $b = e^B = e^{0,6803} = 1,9744$.

Como $a = 0,5087$ e $b = 1,9744$, temos que a curva exponencial que mais se aproxima dos pontos da tabela dada é:

$$y = f(x) = 1,9744e^{0,5087x}.$$

Observação:

Calculando o desvio total $D = \sum (y_i - f(x_i))^2$ com os pontos dados inicialmente e a função $f(x)$ calculada, obtemos $D = 0,0453$, que, sendo próximo de 0, comprova que a curva exponencial obtida realmente passa bem perto de todos pontos dados.

Exemplo 7.4 Determine a curva $y = bx^a$ que mais se aproxima dos pontos

x_i	0,5	1,0	4,0	8,0
y_i	2,0	3,0	6,5	8,0

segundo o método dos mínimos quadrados.

Solução: Devemos tentar obter a equação de uma reta a partir de uma mudança de variáveis da equação dada. Para isso, aplicamos logaritmos aos dois membros da equação: $y = bx^a \Rightarrow \ln y = \ln(bx^a) \Rightarrow \ln y = \ln b + \ln(x^a) \Rightarrow \ln y = \underbrace{\ln b}_B + a \underbrace{\ln x}_X \Rightarrow Y = aX + B$ que é uma equação de reta nas variáveis X e Y , onde $X = \ln x$, $Y = \ln y$ e $B = \ln b$.

Como as mudanças de variáveis envolvem tanto o x , quanto o y , devemos aplicar essas mesmas transformações nos x_i e nos y_i da tabela dada, ou seja, devemos construir uma nova tabela aplicando logaritmo natural a todos os dados iniciais:

$X_i = \ln x_i$	-0,6931	0,0000	1,3863	2,0794
$Y_i = \ln y_i$	0,6931	1,0986	1,8718	2,0794

Como essa nova tabela está relacionada com a equação da reta $Y = aX + B$, podemos calcular os valores de a e B usando as fórmulas já conhecidas:

$$\bullet n = 4, \quad \sum X_i = 2,773, \quad \sum Y_i = 5,7430, \quad \sum X_i^2 = 6,7263, \quad \sum X_i Y_i = 6,4385$$

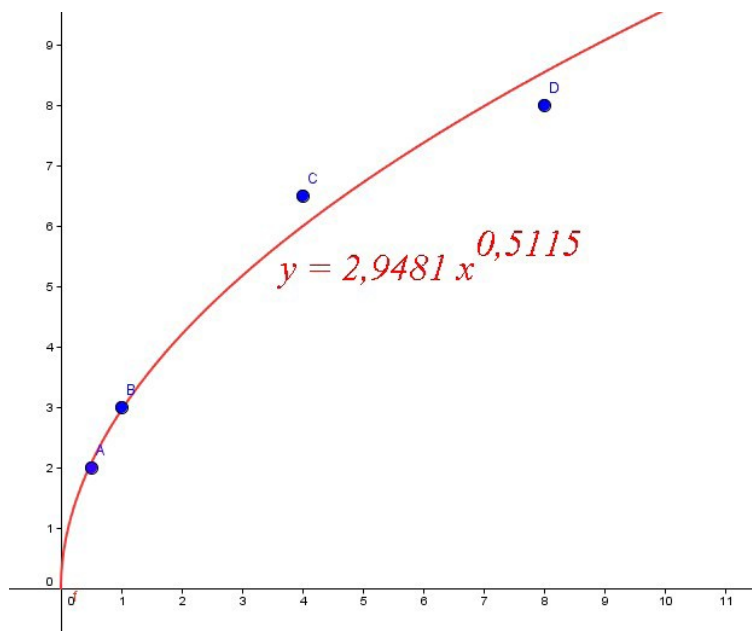
$$\bullet a = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = 0,5115$$

$$\bullet B = \frac{\sum Y_i - a \sum X_i}{n} = 1,0812$$

Obtivemos assim que $B = 1,0812$ e, como $B = \ln b \Rightarrow b = e^B$, temos que $b = e^{1,0812} = 2,9481$. Portanto, a curva procurada neste caso é

$$y = 2,9481x^{0,5115}.$$

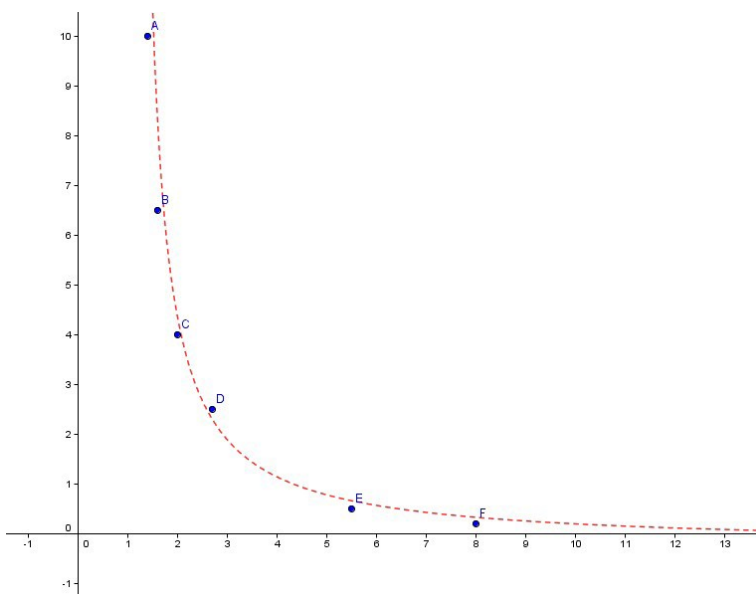
O gráfico da curva encontrada está construído logo a seguir, acompanhado dos 4 pontos dados inicialmente.



Exemplo 7.5 Usando o método dos mínimos quadrados, determine a equação $y = f(x)$ de uma curva que mais se aproxime dos pontos da tabela:

x_i	1,4	1,6	2,0	2,7	5,5	8,0
y_i	10,0	6,5	4,0	2,5	0,5	0,2

Solução: Este problema admite uma infinidade de soluções diferentes porque existem infinitos tipos de curvas que se aproximam de um conjunto de pontos dado. Para resolvê-lo, devemos escolher um tipo particular de curva. Para nos orientarmos nessa escolha, podemos, por exemplo, ver que tipo de curva está sendo sugerido pela disposição dos pontos no plano.



Os pontos da tabela parecem estar perto de um ramo de hipérbole $y = \frac{1}{ax+b}$. Então, como uma das possíveis soluções, vamos determinar a e b tais que a curva $y = \frac{1}{ax+b}$ passa o mais próximo possível dos pontos dados.

A primeira coisa a se fazer é descobrir se é possível transformar essa equação na equação de uma reta, através de uma mudança de variável.

Neste caso, isso é possível porque basta inverter os dois membros da equação para obtermos: $\frac{1}{y} = ax + b$. Fazendo $Y = 1/y$, obtemos $Y = ax + b$ que é uma reta nas variáveis x e Y . Aplicando essa transformação nos pontos da tabela dada, obtemos:

x_i	1,4	1,6	2,0	2,7	5,5	8,0
$Y_i = \frac{1}{y_i}$	0,1000	0,1538	0,2500	0,4000	2,0000	5,0000

Usando que $n = 6$ e os pontos (x_i, Y_i) da tabela acima, calculamos os seguintes somatórios: $\sum x_i = 21,2$, $\sum x_i^2 = 110,06$, $\sum Y_i = 7,9038$, $\sum x_i Y_i = 52,9662$.

Substituindo cada um dos somatórios anteriores nas fórmulas

$$a = \frac{n \sum x_i Y_i - \sum x_i \sum Y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

e

$$b = \frac{\sum Y_i - a \sum x_i}{n},$$

obtemos: $a = 0,7123$ e $b = -1,1994$.

Portanto, a equação da hipérbole procurada é

$$y = \frac{1}{0,7123x - 1,1994}.$$

7.6 Exercícios Propostos

(P52) Usando o *método dos mínimos quadrados*, determine a reta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos da tabela

x_i	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
y_i	1,00	1,70	2,50	3,00	3,80	4,00	5,15

Resp.: $y = 1,310714x - 0,255357$

(P53) Determine uma função $f(x) = be^{ax}$ que melhor se ajusta aos pontos da tabela

x_i	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
y_i	2,00	3,70	4,50	5,00	7,80	5,50	8,00

Resp.: $y = 1,790153e^{0,392982x}$

(P54) a) Determine uma função $y = f(x) = \frac{10}{ax^2+b}$ que melhor se ajusta aos pontos da tabela

x_i	4,00	3,00	2,00	1,00	0,50
y_i	0,75	1,70	2,50	3,00	5,20

b) Calcule o desvio total (isto é, a *soma dos quadrados dos desvios ou resíduos de cada ponto*) dos pontos dados com relação ao gráfico de $f(x)$.

Resp.: $y = \frac{10}{0,665492x^2 + 1,668191}$, $D = 1,909843$

(P55) Determine a equação da hipérbole \mathcal{H} da forma $y = a + \frac{b}{x}$ que melhor se ajusta aos pontos da tabela

x_i	1	2	3	4
y_i	12	7	5	2

e calcule os desvios d_i de cada ponto da tabela com relação a \mathcal{H} .

Resp.: $y = 0,153846 + \frac{12,184615}{x}$, $(d_i) = (-0,338, 0,753, 0,784, -1,200)$

(P56) Determine a equação de uma curva $y = \frac{b}{x^a}$ que melhor se ajusta aos pontos

x_i	5	4	3	2	1
y_i	0,05	0,12	0,25	0,90	7,00

e calcule os desvios d_i de cada ponto da tabela com relação a essa curva.

Resp.: $y = \frac{7,155142}{x^{3,028913}}$, $(d_i) = (-0004, 0,0125, -0,0067, 0,0233, -0,1551)$

(P57) Consideremos $y = ax + b$ a reta que mais se aproxima dos n pontos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ segundo o *método dos mínimos quadrados*. Mostre que essa reta passa pelo ponto (\bar{x}, \bar{y}) onde \bar{x} é a média aritmética dos x_i e \bar{y} é a média aritmética dos y_i , com $i \in \{1, \dots, n\}$.

Referências Bibliográficas

- [1] K. Atkinson (1985), *Elementary Numerical Analysis*, John Wiley & Sons.
- [2] D. M. Cláudio, J. M. Marins (1994), *Cálculo Numérico Computacional*, Ed. Atlas.
- [3] B. P. Demidovich, I. A. Maron (1976), *Computational Mathematics*, Mir Publishers, Moscow.
- [4] J. R. R. Galván (2007), *Maxima con wxMaxima: software libre en el aula de matemáticas*, Oficina de Software Libre de la Universidad de Cádiz, disponível em <http://maxima.sourceforge.net/documentation.html>
- [5] N. V. Kopchenova, I. A. Maron (1975), *Computational Mathematics – worked examples and problems with elements of theory*, Mir Publishers, Moscow.
- [6] E. Kreyszig (1999), *Advanced Engineering Mathematics*, 8th edition, J. Wiley & Sons.
- [7] M. A. G. Ruggiero e V. Lopes (1996), *Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais*, 2a. edição, Pearson Education.
- [8] M. Sadosky (1973), *Cálculo Numérico e Gráfico*, Ed. Interciência.
- [9] W. L. Roque (2000), *Introdução ao Cálculo Numérico – um texto integrado com Derive*, Ed. Atlas.
- [10] J. E. Villate (2007), *Introdução aos Sistemas Dinâmicos – Uma abordagem prática com Maxima*, disponível em http://fisica.fe.up.pt/maxima/book/sistdinam-1_2.pdf