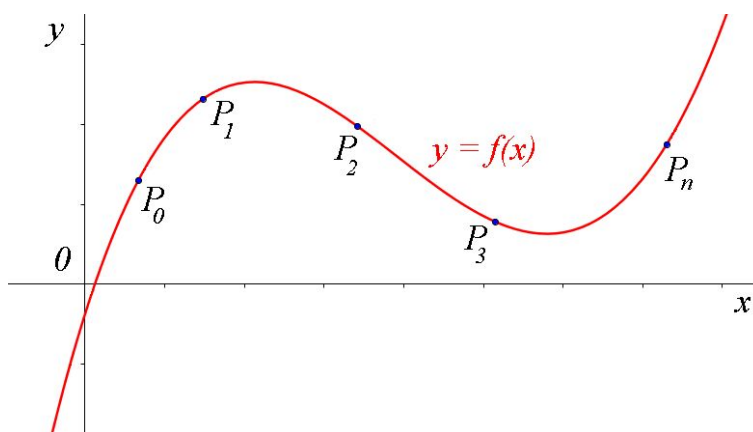


# Capítulo 4

## Interpolação

### 4.1 Introdução

Dados  $n + 1$  pontos do plano  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $\dots$ ,  $P_n = (x_n, y_n)$ , tais que  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$ , nosso principal objetivo neste capítulo é encontrar uma função  $f(x)$  tal que  $f(x_i) = y_i$ ,  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , ou seja, uma função cujo gráfico passe por todos os pontos  $P_i$  dados.



Vamos denominar essa função  $f(x)$  de *função de interpolação* dos pontos dados. Neste capítulo, por uma questão de simplicidade, vamos supor que essa função é polinomial e de menor grau possível.

Funções de interpolação são muito utilizadas em aplicações da Matemática para fazer previsões de valores de funções dentro de certo intervalo. Por exemplo, suponhamos que a população de uma cidade tenha crescido em algumas décadas de acordo com o que é mostrado em uma tabela:

Ano	1950	1960	1970	1980	1990	2000
N. habitantes	34000	42000	60550	110200	180980	250450

Podemos encontrar a função de interpolação  $p(x)$  associada a esses dados e, a partir dela, fazer previsões da população da cidade em outros anos do intervalo  $[1950, 2000]$ . Por exemplo,  $p(1975)$

daria uma idéia razoável da população no ano de 1975, enquanto que  $p(1985)$  daria uma estimativa para a população em 1985.

### Observações

- Quando  $n = 1$  temos apenas dois pontos  $P_0$  e  $P_1$ . Neste caso, a função de interpolação é uma função do primeiro grau  $f(x) = ax + b$ , seu gráfico é uma reta e a interpolação é denominada *linear*.
- Quando  $n = 2$ , temos três pontos  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  e a função de interpolação é da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  cujo gráfico é uma parábola e a interpolação é denominada *quadrática*.

## 4.2 Método de Lagrange

Nesta seção, vamos descrever um método de interpolação proposto pelo matemático francês Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).



Dados  $n + 1$  pontos  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $\dots$ ,  $P_n = (x_n, y_n)$ , tais que  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$ , definimos os seguintes polinômios  $l_0(x)$ ,  $l_1(x)$ ,  $\dots$ ,  $l_n(x)$ :

- $$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \cdots (x_0 - x_n)}$$
- $$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} \\ \bullet \quad &\vdots \\ \bullet \quad l_n(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

Note que na definição de cada  $l_i(x)$  o  $x_i$  não aparece no numerador, mas aparece várias vezes no denominador.

Vamos agora calcular o valor de cada  $l_i(x)$  nos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned} \bullet \quad l_0(x_0) &= 1, \quad l_0(x_1) = 0, \quad l_0(x_2) = 0, \quad \dots, \quad l_0(x_n) = 0 \\ \bullet \quad l_1(x_0) &= 0, \quad l_1(x_1) = 1, \quad l_1(x_2) = 0, \quad \dots, \quad l_1(x_n) = 0 \\ \bullet \quad l_2(x_0) &= 0, \quad l_2(x_1) = 0, \quad l_2(x_2) = 1, \quad \dots, \quad l_2(x_n) = 0 \\ \bullet \quad &\vdots \\ \bullet \quad l_n(x_0) &= 0, \quad l_n(x_1) = 0, \quad l_n(x_2) = 0, \quad \dots, \quad l_n(x_n) = 1 \end{aligned}$$

Obtivemos desse modo que

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Definindo

$$P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \dots + y_n l_n(x),$$

temos que:

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(x_0) &= y_0 \underbrace{l_0(x_0)}_{=1} + y_1 \underbrace{l_1(x_0)}_{=0} + y_2 \underbrace{l_2(x_0)}_{=0} + \dots + y_n \underbrace{l_n(x_0)}_{=0} = y_0 \\ \bullet \quad P(x_1) &= y_0 \underbrace{l_0(x_1)}_{=0} + y_1 \underbrace{l_1(x_1)}_{=1} + y_2 \underbrace{l_2(x_1)}_{=0} + \dots + y_n \underbrace{l_n(x_1)}_{=0} = y_1 \\ \bullet \quad &\vdots \\ \bullet \quad P(x_n) &= y_0 \underbrace{l_0(x_n)}_{=0} + y_1 \underbrace{l_1(x_n)}_{=0} + y_2 \underbrace{l_2(x_n)}_{=0} + \dots + y_n \underbrace{l_n(x_n)}_{=1} = y_n \end{aligned}$$

Portanto,  $P(x_i) = y_i$  para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Isso significa que  $P(x)$  é uma função de interpolação dos pontos  $P_i$  e que é denominado *polinômio de interpolação de Lagrange*.

**Observação**

As definições dos  $\ell_i(x)$  e  $P(x)$  podem ser abreviadas se forem utilizadas as notações de *produto* e *somatório*:  $\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$  e  $P(x) = \sum_{k=0}^n (y_k \ell_k(x)) = \sum_{k=0}^n \left( y_k \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$

**Exemplo 4.1** A respeito de uma função  $f(x)$  é conhecida a seguinte tabela de valores:

$x$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$f(x)$	$4$	$-10$	$-10$	$-8$	$8$

Determine o polinômio de interpolação  $P(x)$  desses pontos e, supondo  $f(x) \approx P(x)$ , obtenha uma estimativa para  $f(1/2)$ .

**Solução:** Sejam  $(x_0, y_0) = (-2, 4)$ ,  $(x_1, y_1) = (-1, -10)$ ,  $(x_2, y_2) = (0, -10)$ ,  $(x_3, y_3) = (1, -8)$  e  $(x_4, y_4) = (2, 8)$ . O polinômio de interpolação de Lagrange é

$$P(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} \\ + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} \\ + y_4 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)},$$

ou seja,

$$P(x) = 4 \cdot \frac{(x + 1)x(x - 1)(x - 2)}{(-2 + 1)(-2)(-2 - 1)(-2 - 2)} - 10 \cdot \frac{(x + 2)x(x - 1)(x - 2)}{(-1 + 2)(-1)(-1 - 1)(-1 - 2)} \\ - 10 \cdot \frac{(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{(0 + 2)(0 + 1)(0 - 1)(0 - 2)} - 8 \cdot \frac{(x + 2)(x + 1)x(x - 2)}{(1 + 2)(1 + 1)(1)(1 - 2)} \\ + 8 \cdot \frac{(x + 2)(x + 1)x(x - 1)}{(2 + 2)(2 + 1)(2)(2 - 1)}.$$

Simplificando, obtemos  $P(x) = x^4 + x - 10$ . E por fim, a previsão para o valor de  $f(\frac{1}{2})$ :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} - 10 = -\frac{151}{16} = -9,4375.$$

**4.3 Método de Newton****4.3.1 Diferenças divididas**

Seja  $f(x)$  uma função da qual se conhecem seus valores em  $n + 1$  pontos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  do seu domínio. Definimos:

- $f[x_0] = f(x_0)$
- $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$
- $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
- $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
- $\vdots$
- $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

Dizemos que  $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$  é a *diferença dividida* de ordem  $k$  de  $f$  calculada nos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_k$  e é denotada de forma abreviada por  $\Delta^k f$ . Note que o cálculo de uma  $\Delta^k f$  depende de todas as  $\Delta^j f$  anteriores para  $j < k$ .

Vamos organizar as diferenças divididas calculadas no formato da seguinte tabela:

$x$	$f(x)$	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\dots$	$\Delta^n f$
$x_0$	$f(x_0)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$\dots$	$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$
$x_1$	$f(x_1)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$\dots$	---
$x_2$	$f(x_2)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$\dots$	---
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	---
$x_n$	$f(x_n)$	---	---	---	---

Essa tabela tem um formato triangular pois os valores abaixo da diagonal secundária não são calculados.

### Observação

A ordem dos pontos  $x_i$  não influencia no resultado final:  $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$ ,  $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_1, x_0] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_0, x_1]$ , etc.

**Exemplo 4.2** Construir a tabela de diferenças divididas da função  $f(x)$  cujos valores conhecidos são dados a seguir:

$x$	$-2$	$0$	$1$	$2$	$4$	$5$
$f(x)$	$5$	$1$	$3$	$-1$	$-1$	$0$

**Solução:** A quantidade de pontos dados é 6. Logo,  $n = 6 - 1 = 5$ . Isso significa que a última coluna da tabela será a do  $\Delta^5 f$ .

Calculamos as seguintes subtrações e divisões:

- $\Delta f: \frac{1-5}{0-(-2)} = -2, \frac{3-1}{1-0} = 2, \frac{-1-3}{2-1} = -4, \frac{-1-(-1)}{4-2} = 0, \frac{0-(-1)}{5-4} = 1$
- $\Delta^2 f: \frac{2-(-2)}{1-(-2)} = \frac{4}{3}, \frac{-4-2}{2-0} = -3, \frac{0-(-4)}{4-1} = \frac{4}{3}, \frac{1-0}{5-2} = \frac{1}{3}$
- $\Delta^3 f: \frac{-3-\frac{4}{3}}{2-(-2)} = -\frac{13}{12}, \frac{\frac{4}{3}-(-3)}{4-0} = \frac{13}{12}, \frac{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}{5-1} = -\frac{1}{4}$
- $\Delta^4 f: \frac{\frac{13}{12}-(-\frac{13}{12})}{4-(-2)} = \frac{13}{36}, \frac{-\frac{1}{4}-\frac{13}{12}}{5-0} = -\frac{4}{15}$
- $\Delta^5 f: \frac{-\frac{4}{15}-\frac{13}{36}}{5-(-2)} = -\frac{113}{1260}$

E, finalmente, montamos a seguinte tabela de diferenças divididas:

$x$	$f(x)$	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
-2	5	-2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{13}{12}$	$\frac{13}{36}$	$-\frac{113}{1260}$
0	1	2	-3	$\frac{13}{12}$	$-\frac{4}{15}$	---
1	3	-4	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{4}$	---	---
2	-1	0	$\frac{1}{3}$	---	---	---
4	-1	1	---	---	---	---
5	0	---	---	---	---	---

### 4.3.2 Polinômio de interpolação segundo Newton

A partir da definição de diferença dividida de ordem 1 de  $f(x)$ , temos que:

$$f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Podemos isolar o valor de  $f(x)$  na igualdade anterior para obtermos:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x].$$

De modo semelhante, a partir da definição de  $f[x_1, x_0, x]$ , obtemos

$$f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

de onde obtemos o seguinte valor para  $f(x)$ :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x].$$

E, de modo geral, a partir da definição de  $f[x_{n-1}, \dots, x_1, x_0, x]$ , obtemos

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x]$$

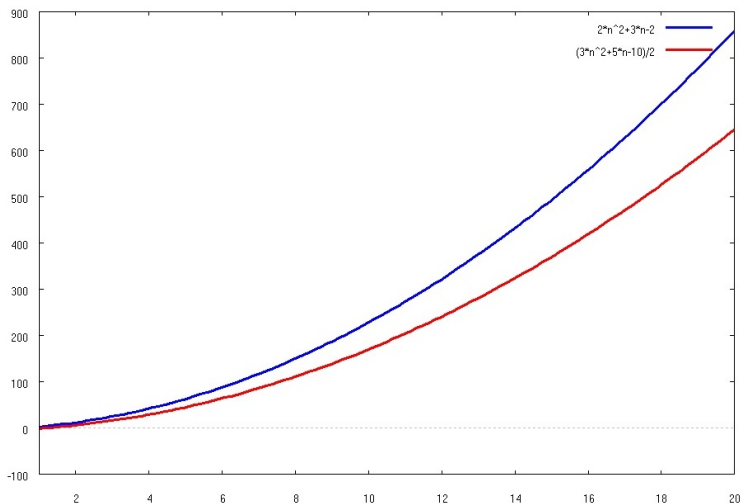
Essa expansão de  $f(x)$  serve de motivação para a definição do seguinte polinômio  $P(x)$  que é denominado *polinômio de interpolação de Newton*:

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$$

Note que a diferença entre os desenvolvimentos de  $f(x)$  e de  $P(x)$  está apenas no final das expressões: em uma aparece  $x$  e na outra aparece  $x_n$ .

### Observação:

Dados  $n+1$  pontos, pode-se mostrar que o total de adições, multiplicações e divisões usadas no cálculo do polinômio de interpolação pelo método de Lagrange é de  $2n^2 + 3n - 2$  operações e pelo método de Newton é de  $\frac{3n^2 + 5n - 10}{2}$  operações. Por exemplo, para  $n = 10$  o método de Lagrange usa 228 operações, enquanto que o de Newton usa 170. Em geral, o método de Newton requer sempre menos operações do que o de Lagrange. Veja gráfico a seguir.



**Exemplo 4.3** Construir a tabela de diferenças divididas da função  $f(x)$  cujos valores conhecidos são dados a seguir e determine seu polinômio de interpolação.

$x$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$
$f(x)$	$-8$	$3$	$-4$	$-17$	$0$

A partir do polinômio de interpolação obtido, obtenha uma estimativa para  $f(3/2)$ .

**Solução:** A partir dos valores dados, fazendo diversas operações de subtração e divisão ( $\frac{3 - (-8)}{0 - (-1)} = 11$ ,  $\frac{-4 - 3}{1 - 0} = 7$ ,  $\frac{-7 - 11}{1 - (-1)} = -9$ , etc.) montamos a tabela de todas as diferenças divididas de  $f(x)$ :

$x$	$f(x)$	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
-1	-8	11	-9	2	1
0	3	-7	-3	6	---
1	-4	-13	15	---	---
2	-17	17	---	---	---
3	0	---	---	---	---

A partir dos elementos da primeira linha e primeira coluna da tabela (com exceção apenas do elemento da última linha da primeira coluna) escrevemos o polinômio de interpolação:

$$P(x) = -8 + 11(x - (-1)) + (-9)(x - (-1))(x - 0) + 2(x - (-1))(x - 0)(x - 1) + 1(x - (-1))(x - 0)(x - 1)(x - 2)$$

Simplificando a expressão anterior, obtemos

$$P(x) = x^4 - 10x^2 + 2x + 3$$

A partir daí, obtemos também que  $f(\frac{3}{2}) \approx P(\frac{3}{2}) = \frac{81}{16} - 10 \cdot \frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 = -\frac{183}{16} = -11,4375$ .

**Exemplo 4.4** Usando o método de interpolação de Newton, obtenha uma estimativa para  $f(0)$ , sendo  $f(x)$  uma função cujos valores conhecidos são:

$x$	-1	1	2	3	5
$f(x)$	-4	0	3	5	3

**Solução:** A tabela de diferenças divididas é:

$x$	$f(x)$	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
-1	-4	2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{72}$
1	0	3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	---
2	3	2	-1	---	---
3	5	-1	---	---	---
5	3	---	---	---	---

A partir da primeira linha e primeira coluna da tabela, escrevemos o polinômio de interpolação segundo o método de Newton:

$$P(x) = -4 + 2(x - (-1)) + \frac{1}{3}(x - (-1))(x - 1) + (-\frac{5}{24})(x - (-1))(x - 1)(x - 2) + \frac{1}{72}(x - (-1))(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Efetuada todas as multiplicações e adições indicadas e simplificando, obtemos

$$P(x) = \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{18}x^3 + \frac{59}{72}x^2 + \frac{41}{18}x - \frac{17}{6}$$

E supondo  $f(x) \approx P(x)$  obtemos finalmente que  $f(0) \approx P(0) = -\frac{17}{6}$ . (OBS.: Para obter  $f(0)$  não é necessário simplificar o polinômio  $P(x)$ , podemos calcular esse valor na expressão para  $P(x)$  antes de efetuar qualquer multiplicação ou adição).

#### 4.4 Cálculo do erro da interpolação

O seguinte teorema pode ser usado para calcular o erro de interpolação, ou seja, o erro cometido na substituição de  $f(x)$  pelo  $P(x)$ , onde  $P(x)$  é o polinômio de interpolação (não importando qual tenha sido o método para obtê-lo).

**Teorema 4.4.1** *Consideremos os pontos  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$  um total de  $n + 1$  pontos dados no domínio de uma função  $f(x)$ . Se  $f(x)$  for continuamente derivável até ordem  $n + 1$  e se  $P(x)$  for o polinômio de interpolação de  $f(x)$  nesses pontos dados, então em qualquer  $x \in [x_0, x_n]$  temos que o erro absoluto da interpolação  $\varepsilon_x$  é dado por*

$$\varepsilon_x = |f(x) - P(x)| = |x - x_0| \cdot |x - x_1| \cdot |x - x_2| \cdots |x - x_n| \cdot \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right|$$

onde  $c$  é algum ponto do interior do intervalo  $[x_0, x_n]$ .

A demonstração pode ser encontrada nas referências bibliográficas como [7] ou [2].

#### 4.5 Exercícios Propostos

(P30) Sabendo que o gráfico da função *logaritmo natural* passa pelos pontos  $P_1 = (2, 0; 0, 693147)$ ,  $P_2 = (2, 5; 0, 916291)$  e  $P_3 = (3, 0; 1, 098612)$ , determine seu polinômio de interpolação e, a partir dele, obtenha uma aproximação para  $\ln(2, 7)$ .

Resp.:  $P(x) = -0,081646x^2 + 0,813695x - 0,607659$ ,  $\ln(2, 7) \approx 0,994118$ .

(P31) O gráfico da função seno passa pelos pontos  $A = (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ ,  $B = (\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $C = (\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  e  $D = (\frac{\pi}{2}, 1)$ . Usando seu polinômio de interpolação nesses pontos, obtenha uma aproximação para  $\sin(\frac{2\pi}{5})$ . Resp.:  $\sin(\frac{2\pi}{5}) \approx 0,951862$

(P32) De acordo com informações da página do IBGE na *Internet*, a população da cidade de João Pessoa nos anos 1991, 1996 e 2000 era 497.600, 549.363 e 597.934 habitantes, respectivamente. Usando interpolação polinomial, obtenha uma estimativa para a população de João Pessoa no ano de 1998. Resp.: 572853 hab.

(P33) Determine uma função polinomial cujo gráfico passe pelos pontos  $A = (-1, -1)$ ,  $B = (0, -1)$ ,  $C = (1, 1)$ ,  $D = (2, -7)$  e  $E = (3, -13)$ . Resp.:  $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x - 1$

(P34) Sejam  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$  números reais e  $f(x)$  uma função de uma variável. Mostre que  $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$  e que  $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_2, x_0]$ .

(P35) O *Teorema Fundamental da Álgebra* afirma que um polinômio não nulo de grau  $n$  tem exatamente  $n$  raízes (reais ou complexas). Usando este resultado, mostre que o polinômio de interpolação  $P_L(x)$  dos pontos da tabela

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$

obtido segundo a fórmula de Lagrange e o polinômio  $P_N(x)$  obtido segundo a fórmula de Newton coincidem. (*Sugestão:* conte quantas raízes tem o polinômio  $f(x) = P_L(x) - P_N(x)$  e conclua).

## Capítulo 5

# Cálculo de Integrais

### 5.1 Introdução

O cálculo de integrais definidas é importante porque está associado a diversos problemas de Física, de Equações Diferenciais, a problemas geométricos tais como o cálculo de comprimento de curvas, áreas de superfícies, volumes de sólidos, entre outros. Por isso, é conveniente que se tenha técnicas de cálculos que sejam eficientes e, preferencialmente, de fácil utilização.

Se uma função é contínua em  $[a, b]$ , então o Teorema Fundamental do Cálculo afirma que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

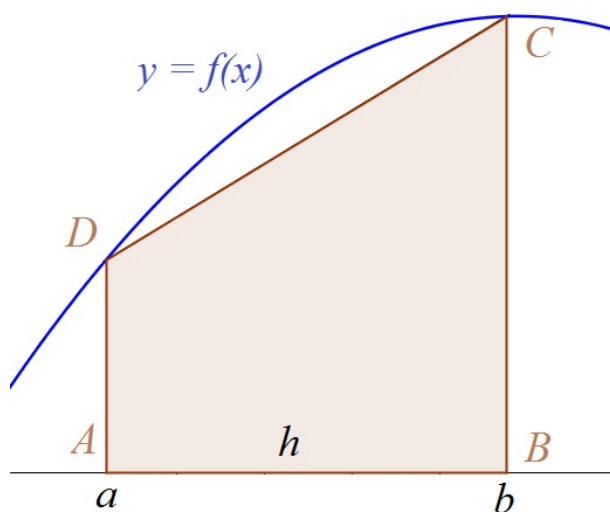
onde  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Isso significa que o cálculo de uma integral é imediato quando se conhece uma primitiva  $F(x)$  para a função  $f(x)$ .

No entanto, o cálculo de uma primitiva pode ser muito trabalhoso ou até mesmo impossível de ser efetuado por meios elementares, ou seja, usando somente as funções elementares (polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas etc.). Por exemplo, as primitivas das funções  $e^{x^2}$ ,  $\frac{\text{sen } x}{x}$  e  $\sqrt{\cos x}$  não são elementares.

O cálculo numérico aproximado, em geral, consiste no cálculo de um somatório em vez da primitiva de alguma função. Muitas vezes, somatórios com poucas parcelas produzem bons resultados. As fórmulas usadas no cálculo numérico de integrais simples são chamadas *fórmulas de quadratura*.

### 5.2 Regra dos Trapézios

Algumas técnicas de cálculo aproximado de integrais consistem na aproximação da função  $f(x)$  por um polinômio de interpolação  $P(x)$  e, assim, usar  $\int_a^b P(x)dx$  como sendo uma aproximação de  $\int_a^b f(x)dx$ . Se  $P(x)$  for do primeiro grau, isto é, se for a reta que passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ , então temos a Regra dos Trapézios.



Na figura, temos um trapézio “deitado” de altura medindo  $h = b - a$  e bases medindo  $f(a)$  e  $f(b)$ . Logo, sua área é dada por  $\frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$ . Essa será a aproximação que usaremos para o valor de  $\int_a^b f(x)dx$ , ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b)).$$

Pode-se mostrar que o erro absoluto dessa aproximação é  $\varepsilon = \left| \frac{h^3}{12} f''(c) \right|$  para algum  $c \in [a, b]$ . Quanto maior o valor de  $n$ , mais próximo de zero será o valor de  $h$  e menor será o erro absoluto.

**Exemplo 5.1** Usando a regra dos trapézios, vamos calcular  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1+x} dx$  e comparar o resultado obtido com o valor exato da integral.

**Solução:** Temos  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ ,  $h = b - a = \frac{1}{2}$  e  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ . Portanto, pela regra dos trapézios,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{4} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{24} = 0,291667.$$

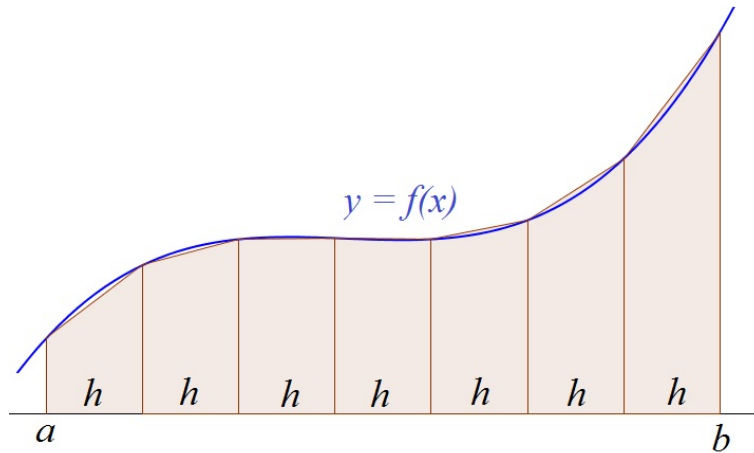
O valor exato dessa integral é

$$\ln(1+x) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \ln(2) - \ln(3/2) = \ln(4/3) = 0,287682.$$

Portanto, o erro absoluto cometido com a utilização da regra dos trapézios é de  $|0,287682 - 0,261667| = 0,003985$ .

### Regra dos Trapézios Composta

Seja  $n$  um inteiro positivo, vamos dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  partes de mesmo comprimento  $h = \frac{b-a}{n}$ .



Sejam  $x_j = a + jh$  com  $j = 0, 1, \dots, n$ . Temos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b.$$

Seja  $y_j = f(x_j)$ . Aplicando a regra anterior nos intervalos  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \\ &\approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \dots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n). \end{aligned}$$

Obtemos assim a *regra dos trapézios composta* ou *regra dos trapézios repetida com passo h*:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

ou, abreviadamente,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^n t_i y_i, \quad \text{onde } t_i = 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 1.$$

**Exemplo 5.2** Calcular  $I = \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx$  usando a regra dos trapézios com  $n = 6$ .

**Solução:** Considerando  $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6} = 0,16667$ , e calculando  $x_i = a + ih$  e  $y_i = f(x_i)$ , temos os seguintes resultados:

$i$	$x_i$	$y_i$	$t_i$
0	1,00000	1,41421	1
1	1,16667	1,60871	2
2	1,33333	1,83586	2
3	1,50000	2,09165	2
4	1,66667	2,37268	2
5	1,83333	2,67620	2
6	2,00000	3,00000	1

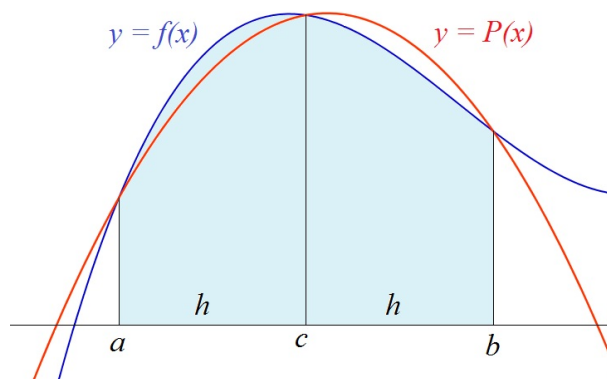
Aplicando a fórmula da regra dos trapézios composta:

$$I \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^n (y_i t_i) = 2,13206,$$

que é o valor aproximado da integral dada.

### 5.3 Regra de Simpson

Seja  $f(x)$  contínua em  $[a, b]$  e  $c = \frac{a+b}{2}$  o ponto médio desse intervalo. A regra de Simpson\* para o cálculo de  $\int_a^b f(x)dx$  consiste em aproximar essa integral por  $\int_a^b P(x)dx$ , onde  $P(x)$  é o polinômio de interpolação quadrática de  $f$  nos pontos  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  e  $(c, f(c))$ .



Usando a fórmula de interpolação de Lagrange, temos que

$$P(x) = f(a) \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b) \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c) \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Seja  $h = \frac{b-a}{2}$ . Então,  $c = a + h$  e  $b = a + 2h$ . Logo,

$$P(x) = \frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{2h^2} f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2h^2} f(b) + \frac{(x-a)(x-a-2h)}{(-h^2)} f(c).$$

\*Thomas Simpson, 1710-1761, matemático inglês

Calculando a integral de  $P(x)$  no intervalo  $[a, b] = [a, a + 2h]$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2h} P(x) dx &= f(a) \int_a^{a+2h} \frac{x^2 - 2ax - 3hx + a^2 + 3ah + 2h^2}{2h^2} dx \\ &+ f(b) \int_a^{a+2h} \frac{x^2 - 2ax - hx + a^2 + ah}{2h^2} dx \\ &+ f(c) \int_a^{a+2h} \frac{x^2 + 2ax + 2hx - a^2 - 2ah}{(-h^2)} dx. \end{aligned}$$

Calculando todas as integrais definidas indicadas e simplificando, obtemos:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]}$$

Pode-se mostrar que o erro absoluto dessa aproximação é  $\varepsilon = \left| \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c) \right|$  para algum  $c \in [a, b]$ . Quanto maior o  $n$ , menores serão o  $h$  e o erro absoluto da aproximação da integral.

**Exemplo 5.3** Calcular novamente a integral do Exemplo 5.2, usando a fórmula anterior.

**Solução:** Temos que  $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $h = (b-a)/2 = 1/2$ . Portanto,

$$I \approx \frac{h}{3} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = \frac{0,5}{3} [f(1) + 4f(1,5) + f(2)] = 2,13016.$$

Dessa forma, observamos que é um valor muito próximo do que foi encontrado no Exemplo 5.2.

**Observação:** Apesar de trabalhoso, é possível se mostrar que

$$f^{(4)}(x) = -\frac{45x^2}{(1+x^3)^{3/2}} + \frac{243x^5}{2(1+x^3)^{5/2}} - \frac{1215x^8}{16(1+x^3)^{7/2}}$$

e que  $|f^{(4)}(c)| \leq \frac{3}{2}$  se  $c \in [1, 2]$ . Daí, o erro  $\epsilon$  da aproximação desse exemplo é tal que

$$\epsilon \leq \frac{h^5}{90} \cdot |f^{(4)}(c)| \leq \frac{(0,5)^5}{90} \cdot \frac{3}{2} \leq 5,21 \cdot 10^{-4}.$$

**Exemplo 5.4** A elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $0 < b < a$  pode ser parametrizada por  $x(t) = a \cos t$ ,  $y(t) = b \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Calcule o comprimento dessa elipse usando a regra de Simpson sabendo que esse comprimento é dado por  $C = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ .

**Solução:** Derivando  $x(t)$  e  $y(t)$  com relação a  $t$ , obtemos  $x'(t) = -a \sin t$  e  $y'(t) = b \cos t$ . Logo, o comprimento da elipse é dado por

$$\begin{aligned} C &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t) + b^2 \sin^2 t} dt \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \left[ 1 - \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) \sin^2 t \right]} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1 - k^2 \sin^2 t)} dt, \end{aligned}$$

onde  $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ . Daí,  $C = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$ . Usando a regra de Simpson com  $f(t) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}$  e  $h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} = \frac{\pi}{4}$  temos que  $C \approx 4a \cdot \frac{h}{3} (f(0) + 4f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{2}))$  e, portanto, o comprimento da elipse é dado por

$$C \approx \frac{a\pi}{3} \left( 1 + 4\sqrt{1 - k^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \sqrt{1 - k^2} \right) = \frac{a\pi}{3} \left( 1 + \sqrt{16 \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)} + \sqrt{1 - k^2} \right),$$

ou seja,

$$C \approx \frac{a\pi}{3} \left( 1 + \sqrt{8(2 - k^2)} + \sqrt{1 - k^2} \right),$$

onde  $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ .

Não há como obter uma resposta exata para o comprimento da elipse, usando-se apenas as funções elementares.

### Regra de Simpson Composta

Vamos dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  partes, sendo  $n$  um inteiro positivo par. Por simplicidade, podemos supor partes de mesmo comprimento  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Sejam  $x_j = a + jh$  e  $y_j = f(x_j)$  com  $j = 0, 1, \dots, n$ . Temos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b.$$

Aplicando a fórmula anterior nos intervalos  $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_n]$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx \\ &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \end{aligned}$$

Obtemos assim a *regra de Simpson composta* de passo  $h$ , com  $n$  pontos:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)}$$

ou, abreviadamente,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^n c_i y_i, \quad \text{onde } c_i = 1, 4, 2, 4, 2, \dots, 4, 2, 4, 1.$$

Denotando por  $I_n$  o valor de  $I = \int_a^b f(x) dx$  calculado pela regra de Simpson com  $n$  pontos, é possível se mostrar que uma estimativa para o erro absoluto da aproximação de  $I$  por  $I_n$  é dado por

$$\varepsilon = \frac{|I_n - I|}{15}, \quad \text{se } n \text{ for um inteiro múltiplo de 4.}$$

**Exemplo 5.5** Usando a regra de Simpson composta com  $n = 8$ , calcule  $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ .

**Solução:** Sejam  $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$  e  $[a, b] = [0, 1]$ . Temos que  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{8} = 0,125$ . Construimos dessa forma a seguinte tabela:

$i$	$x_i$	$y_i = f(x_i)$	$c_i$
0	0,000	4,000000	1
1	0,125	3,938461	4
2	0,250	3,764705	2
3	0,375	3,506849	4
4	0,500	3,200000	2
5	0,625	2,876400	4
6	0,750	2,560000	2
7	0,875	2,265486	4
8	1,000	2,000000	1

Observe que  $x_0 = a$  e  $x_n = x_8 = b$ .

$$I \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^n (c_i y_i) = \frac{0,125}{3} (1 \times 4,000000 + 4 \times 3,938461 + 2 \times 3,764705 + 4 \times 3,506849 + 2 \times 3,200000 + 4 \times 2,876400 + 2 \times 2,560000 + 4 \times 2,265486 + 1 \times 2,000000) = 3,141592.$$

Note que o valor exato dessa integral é  $I = 4 \operatorname{arctg}(x)|_0^1 = 4(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = 4(\frac{\pi}{4} - 0) = \pi$ .

**Exemplo 5.6** Calcule  $I = \int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$  usando a regra de Simpson composta com  $n = 8$ , depois com  $n = 4$ , e obtenha uma estimativa para o erro da aproximação.

**Solução:** Sejam  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$  e  $[a, b] = [0, 2]$ . Se  $n = 8$ , então  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{8} = 0,25$  e, se  $n = 4$ , então  $H = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = 0,5$ . Construimos dessa forma a seguinte tabela de valores:

$i$	$x_i$	$y_i = f(x_i)$	$c_i$	$k_j$
0	0,00	0,50000000	1	1
1	0,25	0,48477181	4	---
2	0,50	0,44340944	2	4
3	0,75	0,38619484	4	---
4	1,00	0,32402714	2	2
5	1,25	0,26477107	4	---
6	1,50	0,21254802	2	4
7	1,75	0,16868024	4	---
8	2,00	0,13290111	1	1

Portanto, a aproximação para  $I$  fornecida pela aplicação da regra de Simpson com 8 pontos é

$$I_8 = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^8 (c_i y_i) = \frac{0,25}{3} (1 \times 0,50000000 + 4 \times 0,48477181 + 2 \times 0,44340944 + 4 \times 0,38619484 + 2 \times 0,32402714 + 4 \times 0,26477107 + 2 \times 0,21254802 + 4 \times 0,16868024 + 1 \times 0,13290111) = 0,65087853,$$

enquanto que a aproximação fornecida pela regra de Simpson com 4 pontos é

$$I_4 = \frac{H}{3} \sum_{j=0}^4 (k_j y_j) = \frac{0,5}{3} (1 \times 0,50000000 + 4 \times 0,44340944 + 2 \times 0,32402714 + 4 \times 0,21254802 + 1 \times 0,13290111) = 0,65079753.$$

Concluimos a partir daí que uma estimativa para o erro no cálculo de  $I_8$  é  $\varepsilon = \left| \frac{I_8 - I_4}{15} \right| = 5,398 \times 10^{-6}$ .

**Exemplo 5.7** Calcular uma aproximação para

$$I = \int_1^2 \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} dx$$

usando a regra de Simpson composta com  $n = 8$  e com  $n = 16$ . Obter uma estimativa para o erro da aproximação.

Sejam  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $n = 16$ ,  $h = \frac{b-a}{n} = 0,0625$  e  $f(x) = \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2}$ .

$i$	$x_i$	$y_i$	$c_i$	$k_j$
0	1,0000	0,33333 33333	1	1
1	1,0625	0,37833 58591	4	–
2	1,1250	0,40256 11035	2	4
3	1,1875	0,40814 79425	4	–
4	1,2500	0,39870 42021	2	2
5	1,3125	0,37837 81931	4	–
6	1,3750	0,35112 32117	2	4
7	1,4375	0,32026 10126	4	–
8	1,5000	0,28831 86842	2	2
9	1,5625	0,25705 28774	4	–
10	1,6250	0,22757 15011	2	4
11	1,6875	0,20048 62419	4	–
12	1,7500	0,17605 70331	2	2
13	1,8125	0,15431 12599	4	–
14	1,8750	0,13513 38540	2	4
15	1,9375	0,11833 11085	4	–
16	2,0000	0,10367 34694	1	1

Logo, o valor aproximado quando  $n = 16$  é:

$$I_{16} = \frac{0,0625}{3} \sum_{i=0}^{16} (c_i y_i) = 0,2761909159.$$

Quando  $n = 8$ , temos  $h = 0,125$  e o valor aproximado da integral é:

$$I_8 = \frac{0,125}{3} \sum_{j=0}^8 (k_j y_j) = 0,2761968884.$$

Portanto, a estimativa de erro no cálculo de  $I_{16}$  é dado por  $\epsilon = \left| \frac{I_{16} - I_8}{15} \right| = 0,0000003982$ .

## 5.4 Regra de Gauss

Diversas regras de quadratura podem ser obtidas ao se aproximar a integral  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  por um somatório do tipo  $A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n)$  onde o valor de  $n$  é previamente escolhido. Surpreendentemente, essas regras podem levar a bons resultados mesmo com valores pequenos de  $n$ . Tudo depende da escolha que se venha a fazer para os  $A_i$  e para os  $x_i$ . Para permitir que esses valores de  $A_i$  e  $x_i$  possam ser calculados, condições adicionais são dadas.

Consideremos uma função  $f(x)$  definida em um intervalo  $[a, b]$  e  $n$  um inteiro positivo. A *regra de Gauss*<sup>†</sup> ou *regra de Gauss-Legendre* para o cálculo de  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ , consiste em escrever

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n) \quad (5.1)$$

onde  $A_1, \dots, A_n, x_1, \dots, x_n$  são constantes e de tal forma que essa fórmula seja exata (erro nulo) quando  $f(x)$  for um polinômio de grau no máximo igual a  $2n - 1$ .

### 5.4.1 Caso particular simples da regra de Gauss

Consideremos, inicialmente, o caso particular em que  $[a, b] = [-1, 1]$  e  $n = 2$ . Assim, vamos determinar as constantes  $A_1, A_2, x_1, x_2$  de tal forma que

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

seja exata quando  $f(x)$  for polinomial de grau no máximo  $2n - 1 = 3$ , ou seja, quando  $f(x)$  for um polinômio de grau 0, 1, 2 ou 3.

No caso particular em que  $f(x) = 1$  (polinômio de grau 0) a fórmula deve ser exata, logo,  $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 1 dx = A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 1 \Rightarrow A_1 + A_2 = 2$ . Além disso, quando  $f(x) = x$  (polinômio

<sup>†</sup>também conhecida como *quadratura gaussiana*

de grau 1), devemos ter que  $\int_{-1}^1 x dx = 0 = A_1 x_1 + A_2 x_2$ ; quando  $f(x) = x^2$ , devemos ter  $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2$  e quando  $f(x) = x^3$ , devemos ter  $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3$ .

Obtemos dessa forma o seguinte sistema não-linear:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0 \\ A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \\ A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Se pudéssemos ter  $A_1 = 0$  como uma possível solução, então, substituindo na primeira e segunda equações, obteríamos  $A_2 = 2$  e  $x_2 = 0$ . Substituindo tudo isso na terceira equação, obteríamos  $0 = \frac{2}{3}$ , o que é um absurdo. Concluímos assim que  $A_1 = 0$  não pode ser solução, ou seja, que  $A_1 \neq 0$ . De modo análogo, podemos concluir também que  $A_2 \neq 0$ .

Se tivéssemos  $x_1 = 0$  como solução, então, ao substituirmos na segunda equação obteríamos  $A_2 x_2 = 0$ . Como  $A_2 \neq 0$ , deveríamos ter  $x_2 = 0$ . Substituindo tudo na segunda equação obteríamos  $0 = \frac{2}{3}$ , um absurdo. Logo,  $x_1 \neq 0$ . Analogamente, temos também  $x_2 \neq 0$ .

Multiplicando a segunda equação por  $x_1^2$ , obtemos  $A_1 x_1^3 + A_2 x_2 x_1^2 = 0$ . Subtraindo dessa equação a quarta equação do sistema, obtemos  $A_2 x_2 (x_2^2 - x_1^2) = 0 \Rightarrow x_2^2 - x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$ . Não podemos ter  $x_1 = x_2$ , porque se isso fosse substituído na segunda equação forneceria  $A_1 + A_2 = 0$  o que contraria o fato de que  $A_1 + A_2 = 2$ . Logo,  $x_1 = -x_2$ . Substituindo na terceira equação e usando a primeira equação, obtemos  $\frac{2}{3} = A_1 x_1^2 + A_2 x_1^2 = (A_1 + A_2) x_1^2 = 2x_1^2$ , ou seja,  $x_1^2 = \frac{1}{3}$ . Concluímos então que  $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ou  $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Suponhamos  $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Então,  $x_2 = -x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$  e substituindo na segunda equação, obtemos  $A_1 = A_2$  que substituído na primeira equação fornece  $A_1 = A_2 = 1$ . Se  $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$  obteríamos algo equivalente.

Assim, a solução do sistema é  $x_1 = -x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$  e  $A_1 = A_2 = 1$  e, portanto, a regra de Gauss quando  $[a, b] = [-1, 1]$  e  $n = 2$  se reduz a

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

ou, usando uma notação decimal com 10 casas decimais

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(0,5773502692) + f(-0,5773502692).$$

**Exemplo 5.8** Vamos calcular  $\int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx$  usando a regra que acabamos de obter.

**Solução:** Neste caso,  $f(x) = \sqrt{2-x^2}$ , logo,  $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(0,57735) + f(-0,57735) = 2,5820$ .

Para comparação, o valor exato dessa integral é  $\frac{\pi}{2} + 1 = 2,5708$ .

### 5.4.2 Mudança de variável

Quando o intervalo de integração  $[a, b]$  não for igual a  $[-1, 1]$ , então uma fazemos uma simples mudança de variável

$$x = \frac{(b-a)t + b + a}{2}$$

e obtemos uma nova integral definida no intervalo  $[-1, 1]$  cujo valor coincide com o da integral dada:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt.$$

Note que, neste caso, deve ser usado que  $dx = \frac{b-a}{2} dt$ .

### 5.4.3 Polinômios de Legendre

Nesta seção, precisamos de alguns resultados básicos envolvendo os *polinômios de Legendre*<sup>‡</sup> que são definidos como sendo os polinômios da forma

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots$$

Esses notáveis polinômios ocorrem em várias aplicações nas áreas mais diversas como Equações Diferenciais, Eletromagnetismo, entre outras.

Escolhendo um valor para  $n$ , expandindo a  $n$ -ésima potência de  $(x^2 - 1)$  e calculando a derivada  $n$ -ésima, podemos escrever o polinômio em um formato mais familiar. Por exemplo,

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{dx^3} [(x^2 - 1)^3] = \frac{1}{48} \frac{d^3}{dx^3} (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{48} (120x^3 - 72x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x). \end{aligned}$$

Os seis primeiros polinômios de Legendre são

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned} \tag{5.2}$$

<sup>‡</sup>Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francês

### 5.4.4 Caso geral da regra de Gauss

Na fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \cdots + A_n f(x_n)$$

os coeficientes  $A_i$  são chamados *pesos* e os  $x_i$  são chamados *abscissas*. Escolhido o valor de  $n$ , podemos obter os pesos e as abscissas dessa regra.

Para isso, substituímos sucessivamente  $f(x)$  por  $1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$  na fórmula anterior e obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \cdots + A_n & = & 2 \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ A_1 x_1^{2n-2} + A_2 x_2^{2n-2} + \cdots + A_n x_n^{2n-2} & = & \frac{2}{2n-1} \\ A_1 x_1^{2n-1} + A_2 x_2^{2n-1} + \cdots + A_n x_n^{2n-1} & = & 0 \end{cases}$$

O sistema não-linear de  $2n$  equações e  $2n$  variáveis anterior é de difícil solução. Mas é possível mostrar que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as raízes do polinômio de Legendre  $P_n(x)$  e que

$$A_i = \frac{2(1 - x_i^2)}{n^2 [P_{n-1}(x_i)]^2}$$

Aqui, apresentamos essa fórmula sem demonstração somente a título de informação adicional.

**Exemplo 5.9** Obter os pesos e abscissas da regra de Gauss quando  $n = 3$ .

**Solução:** O polinômio de Legendre de grau 3 é  $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{x}{2}(5x^2 - 3)$ , cujas raízes são  $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ . Substituindo esses valores nas três primeiras equações do sistema 5.4.4, obtemos:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 & = & 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}A_3 & = & 0 \\ \frac{3}{5}A_1 + \frac{3}{5}A_3 & = & \frac{2}{3} \end{cases}$$

cuja solução é  $A_1 = A_3 = \frac{5}{9}$ ,  $A_2 = \frac{8}{9}$ .

Portanto,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Na hora de efetuar os cálculos, é conveniente usar que  $\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,77459\ 66692$ .

**Exemplo 5.10** Use a regra de Gauss com  $n = 3$  para calcular um valor aproximado para a integral

$$\int_2^3 \frac{x}{1+x^4} dx.$$

**Solução:** Como o intervalo de integração  $[a, b] = [2, 3]$  é diferente de  $[-1, 1]$ , precisamos fazer uma mudança de variável  $x = \frac{(b-a)t+b+a}{2}$  que, neste caso, é  $x = \frac{t+5}{2}$ .

Temos:

$$I = \int_2^3 \frac{x}{1+x^4} dx = \int_{-1}^1 \frac{\frac{t+5}{2}}{1 + \left(\frac{t+5}{2}\right)^4} \frac{1}{2} dt = \int_{-1}^1 g(t) dt$$

onde  $g(t) = \frac{\frac{t+5}{2}}{2\left(1 + \left(\frac{t+5}{2}\right)^4\right)}$ .

Logo,  $I \approx \frac{5}{9}g(-0,7745966692) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g(0,7745966692) = 0,0671599452$ .

Neste caso, como a primitiva é igual a  $\frac{1}{2} \arctg(x^2)$ , concluímos que o valor exato da integral é  $\frac{\arctg(9) - \arctg(4)}{2} = 0,0671607210$ .

### 5.4.5 Tabela de pesos e abscissas da regra de Gauss

A tabela a seguir foi construída determinando-se as raízes  $x_i$  dos polinômios de Legendre de grau  $n$ , para  $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Os pesos  $A_i$  foram calculados usando-se a fórmula  $A_i = \frac{2(1-x_i^2)}{n^2[P_{n-1}(x_i)]^2}$ .

$n$	abscissas	pesos
2	$x_1 = -x_2 = 0,5773502692$	$A_1 = A_2 = 1$
3	$x_1 = -x_2 = 0,7745966692$	$A_1 = A_2 = 0,5555555556$
	$x_3 = 0$	$A_3 = 0,8888888889$
4	$x_1 = -x_2 = 0,8611363116$	$A_1 = A_2 = 0,3478548451$
	$x_3 = -x_4 = 0,3399810436$	$A_3 = A_4 = 0,6521451549$
5	$x_1 = -x_2 = 0,9061798459$	$A_1 = A_2 = 0,2369268851$
	$x_3 = -x_4 = 0,5384693101$	$A_3 = A_4 = 0,4786286705$
	$x_5 = 0$	$A_5 = 0,5688888889$
6	$x_1 = -x_2 = 0,9324695142$	$A_1 = A_2 = 0,1713244924$
	$x_3 = -x_4 = 0,6612093865$	$A_3 = A_4 = 0,3607615730$
	$x_5 = -x_6 = 0,2386191861$	$A_5 = A_6 = 0,4679139346$
7	$x_1 = -x_2 = 0,9491079123$	$A_1 = A_2 = 0,1294849662$
	$x_3 = -x_4 = 0,7415311855$	$A_3 = A_4 = 0,2797053915$
	$x_5 = -x_6 = 0,4058451513$	$A_5 = A_6 = 0,3818300505$
	$x_7 = 0$	$A_7 = 0,4179591837$
8	$x_1 = -x_2 = 0,9602898565$	$A_1 = A_2 = 0,1012285363$
	$x_3 = -x_4 = 0,7966664774$	$A_3 = A_4 = 0,2223810345$
	$x_5 = -x_6 = 0,5255324099$	$A_5 = A_6 = 0,3137066459$
	$x_7 = -x_8 = 0,1834346425$	$A_7 = A_8 = 0,3626837838$

Note que cada peso associado a abscissa não nula aparece repetido: uma vez associado a uma abscissa positiva e outra vez associado a uma abscissa negativa. Os valores de  $x_i$  podem ser permutados, desde que se faça a mesma permutação com os respectivos  $A_i$ .

**Exemplo 5.11** Usando a regra de Gauss com  $n = 4$ , calcule uma aproximação para

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x+2} dx = \ln 3 \approx 1,09861\ 2289.$$

**Solução:** Da tabela, temos:  $x_1 = -x_2 = 0,8611363116$ ,  $A_1 = A_2 = 0,3478548451$ ,  $x_3 = -x_4 = 0,3399810436$ ,  $A_3 = A_4 = 0,6521451549$ . Sendo  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ , temos

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + A_4 f(x_4) = 1,098570354.$$

**Exemplo 5.12** Calcule  $I = \int_2^5 \frac{\cos(x)}{1+x^4} dx$  usando a regra de Gauss com  $n = 4$ .

**Solução:** O intervalo de integração é  $[a, b] = [2, 5] \neq [-1, 1]$ . Fazendo a mudança de variável:  $x = \frac{(b-a)t + b + a}{2}$ , obtemos  $x = \frac{3t+7}{2} \Rightarrow dx = \frac{3}{2} dt$ . Substituindo na integral dada, obtemos:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\cos\left(\frac{3t+7}{2}\right)}{1 + \left(\frac{3t+7}{2}\right)^4} \cdot \frac{3}{2} dt.$$

Consideremos  $F(t) = \frac{\frac{3}{2} \cos\left(\frac{3t+7}{2}\right)}{1 + \left(\frac{3t+7}{2}\right)^4}$  e as abscissas e pesos copiados da tabela anterior:

- Abscissas:\*  $t_1 = -t_2 = 0,8611363116$ ,  $t_3 = -t_4 = 0,3399810436$
- Pesos:  $A_1 = A_2 = 0,3478548451$ ,  $A_3 = A_4 = 0,6521451549$

A aplicação<sup>†</sup> da regra de Gauss com  $n = 4$  fornece a seguinte aproximação para a integral:

$$I \approx A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2) + A_3 F(t_3) + A_4 F(t_4) = -0,0268375925.$$

**Exemplo 5.13** Calcule  $I = \int_1^3 \frac{1}{x(x^{10} + 1)} dx$  usando a regra de Gauss com  $n = 5$ .

**Solução:** O intervalo de integração é  $[a, b] = [1, 3] \neq [-1, 1]$ . Logo, devemos fazer uma mudança de variável:  $x = \frac{(b-a)t + b + a}{2}$ , ou seja,  $x = \frac{2t+4}{2} = t + 2 \Rightarrow dx = dt$ . Substituindo em  $I$ , obtemos:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(t+2)((t+2)^{10} + 1)} dt.$$

Consideremos  $F(t) = \frac{1}{(t+2)((t+2)^{10} + 1)}$  e as abscissas e pesos copiados da tabela anterior:

\*as abscissas também poderiam ser denotadas por  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

†pode-se mostrar que o valor exato dessa integral é  $-0,0268074864$ .

- Abscissas<sup>‡</sup>:  $x_1 = -x_2 = 0,9061798459$ ,  $x_3 = -x_4 = 0,5384693101$ ,  $x_5 = 0$
- Pesos:  $A_1 = A_2 = 0,2369268851$ ,  $A_3 = A_4 = 0,4786286705$ ,  $A_5 = 0,5688888889$

A aplicação<sup>§</sup> da regra de Gauss com  $n = 5$  é:

$$I \approx A_1 F(x_1) + A_2 F(x_2) + A_3 F(x_3) + A_4 F(x_4) + A_5 F(x_5) = 0,0702523461.$$

## 5.5 Exercícios Propostos

(P36) Usando a regra dos trapézios com  $n = 10$  calcule  $\int_{-1}^1 \sqrt{2+x^2} dx$ . **Resp.: 3,052859**

(P37) Calcule  $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^4+1} dx$  usando a regra de Gauss com  $n = 4$ . **Resp.: 2,29116617**

(P38) Calcule  $\int_{-1}^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} dx$  usando a regra de Gauss com  $n = 5$ . **Resp.: 5,049611017**

(P39) Deduza uma fórmula de integração da forma

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \omega_1 f\left(-\frac{1}{2}\right) + \omega_2 f(0) + \omega_3 f\left(\frac{1}{2}\right)$$

que calcule a integral de polinômios de grau menor do que ou igual a 2 no intervalo  $[-1, 1]$  de forma exata.

**Resp.:  $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{4}{3} f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} f(0) + \frac{4}{3} f\left(\frac{1}{2}\right)$**

(P40) Calcule  $\int_5^7 \ln(\ln(x)) dx$  usando a regra de Simpson com  $n = 8$  e com  $n = 4$  e obtenha uma estimativa para o erro da aproximação. **Resp.:  $I_8 = 1,158220$ ,  $I_4 = 1,158214$ ,  $\epsilon = 3,56 \times 10^{-7}$**

(P41) a) Calcule a integral  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4+1} dx$  usando a regra de Simpson com  $n = 8$ ;

b) Sabendo que o valor exato dessa integral é  $\frac{\sqrt{2}}{4} \ln(3+2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$  calcule o erro absoluto cometido na aproximação do item (a). **Resp.: 1,73422740,  $\epsilon = 2,8142640 \times 10^{-4}$**

(P42) Usando a regra de Simpson com  $n = 10$ , calcule o comprimento  $C$  da elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1$  sabendo que ela pode ser parametrizada por  $\alpha(t) = (2 \cos t, \sqrt{7} \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , e que  $C = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt$ . **Resp.:  $C = 14,665680$**

<sup>‡</sup>as abscissas também poderiam ser denotadas por  $t_1, t_2, t_3, t_4$  e  $t_5$ .

<sup>§</sup>pode-se mostrar que o valor exato dessa integral é  $\ln 3 - \frac{\ln 5}{5} - \frac{\ln 1181}{10} = 0,0693130245$  e que o erro absoluto do cálculo da integral é de  $9,39 \times 10^{-4}$ .

(P43) Um carro percorre uma pista em 84 segundos. A velocidade do carro a cada intervalo de 6 segundos está mostrada na seguinte tabela:

$t(s)$	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
$v(m/s)$	0	20	22	22	24	30	33	34	37	34	35	33	30	18	0

Qual é o comprimento da pista? **Resp.: 2252 m**

(P44) Determine  $P_5(x)$ , o polinômio de Legendre de grau 5, e todas as suas raízes que são as abscissas da regra de Gauss com  $n = 5$ . (*Sugestão:* use a definição e fatore o polinômio; use a mudança de variável  $x^2 = y$ ).

**Resp.:**  $P_5(x) = \frac{x}{8}(63x^4 - 70x^2 + 15)$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{\sqrt{35+2\sqrt{70}}}{3\sqrt{7}}$ ,  $x_3 = -x_2$ ,  $x_4 = \frac{\sqrt{35-2\sqrt{70}}}{3\sqrt{7}}$ ,  $x_5 = -x_4$

(P45) Seja  $R = 2$ . Usando a regra de Gauss com  $n = 5$ , calcule  $I = \int_{-R}^R [f(x) - g(x)] dx$ , onde  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  e  $g(x) = -f(x)$ . Note que  $I$  corresponde à área de um círculo de raio  $R$ .

**Resp.: 12,607250**

(P46) Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  os pesos e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  as abscissas da regra de Gauss para o cálculo de integrais. Mostre que  $\sum_{i=1}^n A_i = 2$  e  $\sum_{i=1}^n A_i x_i = 0$ .