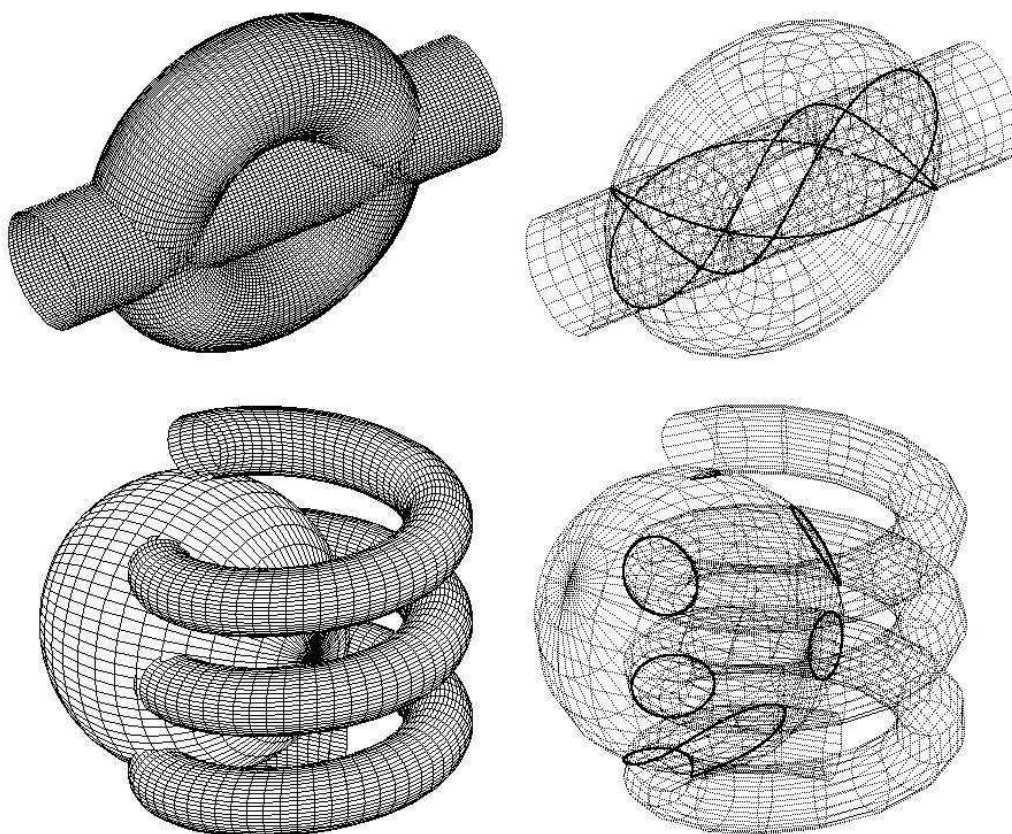


UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CÁLCULO NUMÉRICO

Introdução à Matemática Computacional



Lenimar Nunes de Andrade

numerufpb@gmail.com

versão 1.2 – 10/março/2012

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Erros absolutos	1
1.1.1	Sequências recorrentes	3
1.1.2	Critério para determinação do limite de uma sequência convergente	4
1.2	Cálculo de valores de funções	5
1.2.1	Função logarítmica	5
1.2.2	Funções trigonométricas	6
1.3	Cálculo do valor de π	7
1.3.1	Fórmulas envolvendo π e a função arco-tangente	7
1.3.2	Série de potências da função arco-tangente	9
1.3.3	Cálculo do valor de π ao longo dos séculos	9
1.3.4	Curiosidade: frases que fornecem o valor de π	11
1.4	Exercícios Propostos	12
2	Resolução de Equações	14
2.1	Introdução	14
2.2	Método da Bisseção	15
2.3	Método das Cordas	16
2.4	Método da Iteração Linear	18
2.5	Método de Newton	20
2.6	Comparando os diversos métodos	24
2.7	Exercícios Propostos	25
3	Sistemas Lineares	28
3.1	Sistemas Lineares	28
3.2	Método de Eliminação de Gauss	28
3.3	Exercícios Propostos	32
4	Interpolação	34
4.1	Introdução	34

4.2	Método de Lagrange	35
4.3	Método de Newton	37
4.3.1	Diferenças divididas	37
4.3.2	Polinômio de interpolação segundo Newton	39
4.4	Cálculo do erro da interpolação	42
4.5	Exercícios Propostos	42
5	Cálculo de Integrais	44
5.1	Introdução	44
5.2	Regra dos Trapézios	44
5.3	Regra de Simpson	47
5.4	Regra de Gauss	52
5.4.1	Caso particular simples da regra de Gauss	52
5.4.2	Mudança de variável	54
5.4.3	Polinômios de Legendre	54
5.4.4	Caso geral da regra de Gauss	55
5.4.5	Tabela de pesos e abscissas da regra de Gauss	56
5.5	Exercícios Propostos	58
6	Equações Diferenciais	60
6.1	Definições Básicas	60
6.2	Método de Euler	61
6.3	Método de Runge-Kutta	63
6.3.1	Método de Runge-Kutta de 2ª ordem (RK2)	64
6.3.2	Método de Runge-Kutta de 3ª ordem (RK3)	64
6.3.3	Método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4)	65
6.4	Exercícios Propostos	66
7	Método dos Mínimos Quadrados	68
7.1	Introdução	68
7.2	Desvio de um ponto com relação a uma curva	69
7.3	Desvio total	70
7.4	Caso linear	71
7.5	Redução ao caso linear	73
7.6	Exercícios Propostos	78
	Referências Bibliográficas	79

Prefácio

Este texto corresponde às notas de aula resumidas da disciplina “Cálculo Numérico” que vem sendo ministrada por mim na Universidade Federal da Paraíba desde agosto de 2002.

“Cálculo Numérico”, também conhecido como “Métodos Numéricos” ou “Matemática Computacional”, faz parte do currículo mínimo obrigatório das engenharias e cursos de Matemática, Física, Estatística e Computação, sendo fundamental em aplicações da Matemática. Os pré-requisitos são conhecimentos básicos de Cálculo Diferencial e Integral e noções de programação.

Este texto foi elaborado usando-se exclusivamente programas livres e gratuitos que podem ser facilmente encontrados à disposição na Internet:

- **Latex**: um programa que produz textos com fórmulas matemáticas de altíssima qualidade gráfica. Apesar de ser destinado principalmente a textos matemáticos, pode ser utilizado também em fórmulas de Química Orgânica, partituras musicais, partidas de xadrez, textos em outros idiomas como chinês, japonês, árabe, hebraico, russo, grego, entre outros. Pode ser copiado gratuitamente a partir de www.miktex.org. Apresentações (no estilo PowerPoint) também podem ser construídas com ele.
- **Maxima**: usado em todos os cálculos. É um programa de Computação Algébrica semelhante aos poderosos Maple ou Mathematica. Em desenvolvimento desde 1969, pode ser copiado de maxima.sourceforge.net e ser usado também como linguagem de programação. Todos os exemplos e exercícios foram programados nessa linguagem.
- **GeoGebra**: programa de Geometria Dinâmica que pode ser copiado de www.geogebra.org. Todos os gráficos foram produzidos pelo Maxima ou pelo GeoGebra (= Geometria+Algebra).

As imagens com fotos ou desenhos de matemáticos famosos foram copiadas de “The Mac Tutor History of Mathematics Archive” (www.gap-system.org/~history) e alguns selos de “Images of Mathematicians on Postage Stamps” (jeff560.tripod.com)

João Pessoa, 30 de setembro de 2011

Lenimar Nunes de Andrade

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, definimos alguns conceitos que serão utilizados nos capítulos seguintes.

1.1 Erros absolutos

Definição 1.1 Consideremos x' uma aproximação para um valor x considerado exato. O erro absoluto da aproximação de x por x' , denotado por Δ_x é a distância entre esses valores, ou seja,

$$\Delta_x = |x - x'|.$$

O erro relativo dessa aproximação, denotado por δ_x , é definido por

$$\delta_x = \frac{|x - x'|}{|x|}.$$

Exemplo 1.1 Sejam $a' = 10$ e $b' = 1000$ aproximações de $a = 10,154$ e $b = 1000,154$, respectivamente. Então, os erros absolutos e relativos dessas aproximações são:

- $\Delta_a = |a - a'| = |10,154 - 10| = 0,154$
- $\delta_a = \frac{|a - a'|}{|a|} = \frac{0,154}{10,154} = 0,01516 = 1,516\%$
- $\Delta_b = |b - b'| = |1000,154 - 1000| = 0,154$
- $\delta_b = \frac{|b - b'|}{|b|} = \frac{0,154}{1000,154} = 0,0001539 = 0,01539\%$

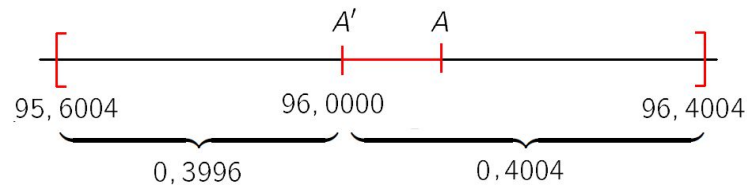
Note que apesar dos erros absolutos serem iguais, os erros relativos são bem diferentes um do outro. Os erros relativos costumam ser expressos em forma de porcentagens.

Exemplo 1.2 Uma sala de formato retangular foi medida e foram obtidos 8 m e 12 m como sendo sua largura e seu comprimento, respectivamente. Sabendo que o erro cometido em cada uma dessas medições é no máximo 2 cm, determine o erro máximo cometido no cálculo de sua área.

Denotemos por

- a' : largura aproximada (obtida pela medição)
- b' : comprimento aproximado (obtido pela medição)
- a : largura exata da sala
- b : comprimento exato da sala
- A' : área aproximada da sala
- A : área exata

São dados $a' = 8m$ e $b' = 12m$. Portanto, $A' = a'b' = 8 \cdot 12 = 96m^2$. Por hipótese, $\Delta_a = |a - a'| \leq 2cm$ e $\Delta_b = |b - b'| \leq 2cm$, ou seja, $|a - 8| \leq 0,02m$ e $|b - 12| \leq 0,02m$ que equivalem a $-0,02 \leq a - 8 \leq 0,02$ e $-0,02 \leq b - 12 \leq 0,02 \implies 8 - 0,02 \leq a \leq 8 + 0,02$ e $12 - 0,02 \leq b \leq 12 + 0,02 \implies 7,98 \leq a \leq 8,02$ e $11,98 \leq b \leq 12,02$. Multiplicando-se essas desigualdades, obtemos: $95,6004 \leq ab \leq 96,4004$, isto é, $95,6004 \leq A \leq 96,4004$. Isso significa que a área exata é algum ponto do intervalo $[95,6004, 96,4004]$.



Como A' também é um ponto desse intervalo, a maior distância entre A e A' ocorre quando A for uma das extremidades do intervalo. Portanto, o erro máximo no cálculo da área é de $|96 - 96,4004| = 0,4004m^2$.

Exemplo 1.3 Um balão de formato esférico é medido e obteve-se $R' = 4 m$ como sendo o seu raio. Sabendo que o erro cometido no cálculo do raio é no máximo 10 cm, calcule o erro máximo cometido no cálculo do seu volume.

Sendo o raio aproximado do balão igual a 4 m, o volume aproximado do balão esférico é

$$V' = \frac{4}{3}\pi(R')^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,1415926 \cdot 4^3 = 268,082517 m^3.$$

O erro máximo no cálculo do raio é no máximo 10 cm, ou seja, 0,1 m, temos que

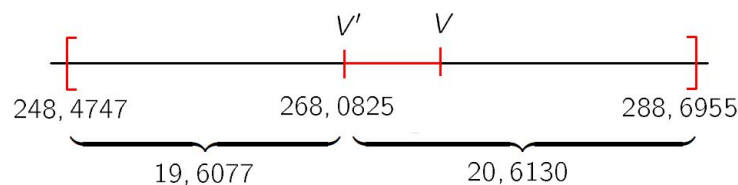
$$\Delta_R = |R - R'| = |R - 4| \leq 0,1$$

, onde R denota o valor do raio exato do balão. Logo, $-0,1 \leq R - 4 \leq 0,1$ o que é equivalente a $4 - 0,1 \leq R \leq 4 + 0,1$, isto é, $3,9 \leq R \leq 4,1$. Elevando-se ao cubo, obtemos $59,319000 \leq R^3 \leq 68,920999$ e multiplicando-se tudo por $\frac{4}{3}\pi$, obtemos

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 59,319000 \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq \frac{4}{3}\pi \cdot 68,920999,$$

que equivale a $248,474794 \leq V \leq 288,695545$.

Portanto, V é algum ponto do intervalo $[248,474794, 288,695545]$. Como V' é um ponto desse intervalo, então a maior distância possível entre V e V' ocorre quando V está em uma das extremidades.



Logo, o erro máximo cometido no cálculo do volume do balão é de $|268,082517 - 288,695545| = 20,613028 \text{ m}^3$.

1.1.1 Sequências recorrentes

Definição 1.2 Uma sequência (x_n) é denominada recorrente (ou recursiva) quando o termo geral x_n depender dos termos anteriores, ou seja, quando

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots)$$

para $n = 2, 3, 4, \dots$. No caso mais simples, temos $x_n = f(x_{n-1})$.

Exemplo 1.4 Consideremos uma sequência (x_n) definida por $x_1 = 1$ e $x_n = nx_{n-1}$ para todo $n = 2, 3, 4, \dots$. Como cada x_n depende do valor do termo anterior x_{n-1} temos um exemplo de sequência recorrente. Além disso temos que:

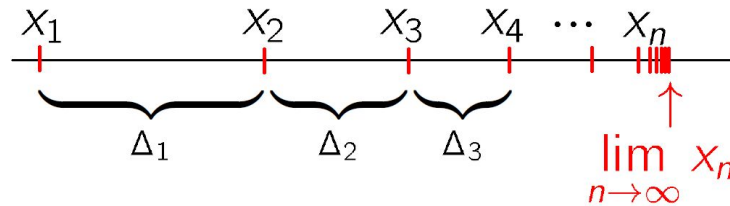
- $x_2 = 2x_1 = 2 \cdot 1 = 2$
- $x_3 = 3x_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $x_4 = 4x_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $x_5 = 5x_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- etc.

Note que, neste caso, a sequência (x_n) coincide com a sequência dos fatoriais de n .

1.1.2 Critério para determinação do limite de uma sequência convergente

É muito comum em problemas numéricos termos uma sequência convergente (x_n) e determinarmos o limite de (x_n) quando n tende a infinito. Nesses casos, usaremos o seguinte critério para determinar o limite aproximado da sequência:

- Definimos um valor positivo próximo de zero denotado por ε ou ϵ (letra grega épsilon). Por exemplo, podemos considerar algo como $\varepsilon = 0,0001 = 10^{-4}$ ou $\varepsilon = 0,0000001 = 10^{-7}$, etc.
- Calculamos os termos da sequência x_1, x_2, x_3, \dots e as distâncias entre termos consecutivos $\Delta_n = |x_{n+1} - x_n|$ para $n = 1, 2, 3, \dots$
- Quando $\Delta_n < \varepsilon$ encerramos e dizemos que o último x_n calculado é o limite aproximado da sequência.



Exemplo 1.5 Sendo a um número real positivo, sabe-se que a sequência recorrente (x_n) tal que $x_1 = 1$ e $x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)$ converge para \sqrt{a} . Usando essa sequência recorrente, calcule $\sqrt{2}$ com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-5}$.

Igualamos \sqrt{a} com $\sqrt{2}$ e obtemos que $a = 2$. A partir daí, utilizamos a fórmula para x_n com $n = 2, 3, 4, \dots$ e calculamos as diferenças $\Delta = |x_n - x_{n-1}|$:

- $n = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = 1,5$ e $\Delta_1 = |x_2 - x_1| = 0,5$
- $n = 3 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{a}{x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(1,5 + \frac{2}{1,5} \right) = 1,4166667$ e $\Delta_2 = |x_3 - x_2| = 0,08333333$
- $n = 4 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2} \left(x_3 + \frac{a}{x_3} \right) = \frac{1}{2} \left(1,4166667 + \frac{2}{1,4166667} \right) = 1,41421569$ e $\Delta_3 = |x_4 - x_3| = 0,00245098$
- $n = 5 \Rightarrow x_5 = \frac{1}{2} \left(x_4 + \frac{a}{x_4} \right) = \frac{1}{2} \left(1,41421569 + \frac{2}{1,41421569} \right) = \boxed{1,41421356}$ e $\Delta_4 = |x_5 - x_4| = 2,1 \times 10^{-6} < \varepsilon$.

Portanto, obtivemos que $\sqrt{2} \approx 1,41421356$.

1.2 Cálculo de valores de funções

O cálculo de valores de funções em pontos específicos é uma atividade essencial para qualquer área da Matemática Aplicada e para os métodos numéricos em geral. Pode ser realizado de várias formas:

- Séries de potências
- Frações contínuas
- Sequências recorrentes

Vamos utilizar apenas séries de potências por ser um método bem conhecido, simples e eficiente.

1.2.1 Função logarítmica

Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$. Um resultado bem conhecido há vários séculos é a seguinte soma de uma série geométrica:

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}$$

Note que temos aqui uma série geométrica (P.G.) com primeiro termo igual a $a_1 = 1$ e razão $q = x^2$ logo, ela converge para $S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - x^2}$.

Podemos efetuar várias operações com uma série de potências. Entre as operações permitidas está o cálculo da integral $\int_0^x a_n dx$ de cada termo da série. Usando que $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$, temos que

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{1+x} dx + \int \frac{1}{1-x} dx \right) = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Calculando a integral de cada termo da série geométrica anterior, obtemos:

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \dots = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right),$$

desde que $|x| < 1$.

A função $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ é conhecida pelo nome de *arco-tangente hiperbólica* de x e é denotada por $\text{arctgh}(x)$ ou $\text{arctanh}(x)$ ou $\text{atanh}(x)$ ou $\tanh^{-1}(x)$:

$$\text{arctgh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Sendo assim, a série anterior também pode ser escrita na forma:

$$\text{arctgh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \dots$$

Utilizando uma quantidade finita de termos dessa série, podemos obter aproximações para $\operatorname{arctgh}(x)$. Por exemplo, usando-se apenas 5 termos da série, obtemos:

$$\operatorname{arctgh}(x) \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}.$$

As funções hiperbólicas possuem inúmeras propriedades. Entre elas, vamos citar aqui apenas uma bem particular:

$$\ln 2 = 2 \operatorname{arctgh} \frac{1}{5} + 2 \operatorname{arctgh} \frac{1}{7}$$

Essa fórmula foi utilizada por Euler em 1748 para calcular $\ln 2$ com 25 casas decimais. Sua demonstração é imediata, basta usar a definição da função arco-tangente hiperbólica: $2 \operatorname{arctgh} \frac{1}{5} + 2 \operatorname{arctgh} \frac{1}{7} = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} \right) \right] = \ln(6/4) + \ln(8/6) = \ln(\frac{6}{4} \cdot \frac{8}{6}) = \ln 2$.

Usando a fórmula anterior, podemos calcular $\ln 2$ desde que saibamos como calcular o arco-tangente hiperbólico de $1/5$ e de $1/7$. Para efetuarmos esse tipo de cálculo, basta usar a fórmula de aproximação do $\operatorname{arctgh}(x)$ anterior:

- $\operatorname{arctgh} \frac{1}{5} \approx (\frac{1}{5}) + \frac{(\frac{1}{5})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{5})^5}{5} + \frac{(\frac{1}{5})^7}{7} + \frac{(\frac{1}{5})^9}{9} = 0,20273255$
- $\operatorname{arctgh} \frac{1}{7} \approx (\frac{1}{7}) + \frac{(\frac{1}{7})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{7})^5}{5} + \frac{(\frac{1}{7})^7}{7} + \frac{(\frac{1}{7})^9}{9} = 0,14384103$

e, daí, obtemos $\ln 2 \approx 2 \cdot (0,20273255 + 0,14384103) = 0,69314716$, que é uma aproximação muito boa para $\ln 2$.

1.2.2 Funções trigonométricas

Os valores das funções trigonométricas podem ser calculados de várias maneiras, inclusive através de séries de potências tais como:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$\operatorname{cos} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

Em algumas séries, pode ser útil o seguinte teorema (cuja demonstração pode ser encontrada em [1], [2] ou [3]).

Teorema 1.2.1 *Consideremos a série alternada*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots$$

onde $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ e a sequência $(|a_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ é decrescente. Sendo n um inteiro positivo e S_n a soma dos n primeiros termos da série, então o erro cometido ao se aproximar S por S_n é menor ou igual a $|a_{n+1}|$, ou seja, o erro da aproximação é menor ou igual ao módulo do primeiro termo desprezado da série.

Exemplo 1.6 Calcular $\cos 7^\circ$ usando apenas os 5 primeiros termos do desenvolvimento em série da função cosseno e obter uma estimativa para o erro cometido.

Solução: Transformando 7° em radianos, obtemos: $7^\circ = 7 \times \frac{\pi}{180} = 7 \times \frac{3,1415926535}{180} = 0,12217305$ rad = α . Como $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \frac{\alpha^8}{8!}$ temos que

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{0,12217305^2}{2} + \frac{0,12217305^4}{24} - \frac{0,12217305^6}{720} + \frac{0,12217305^8}{40320},$$

ou seja, $\cos 7^\circ \approx 0,99254615$.

Uma estimativa para o erro no cálculo é dada pelo módulo do primeiro termo desprezado da série do $\cos(\alpha)$ que é igual a $\frac{\alpha^{10}}{10!} \approx 2,04 \times 10^{-15}$.

1.3 Cálculo do valor de π

Desde a antiguidade que o cálculo do valor de π tem despertado o interesse de diferentes povos. Aproximações como 3,12 ou 3,16 já eram conhecidas por babilônios ou egípcios há vários milênios.

Calculado na antiguidade por métodos puramente geométricos (inscrição e circunscrição de polígonos regulares em uma circunferência), a partir do século XVIII passou a ser calculado por métodos analíticos, usando-se apenas operações algébricas como adição, multiplicação e divisão de números reais. Esses métodos analíticos costumam produzir resultados com grande precisão, ou seja, com muitas casas decimais corretas. Entre os vários métodos analíticos conhecidos, destaca-se uma família de fórmulas que expressam π como uma combinação de vários arco-tangentes. No início do século XVIII, uma dessas fórmulas foi utilizada para calcular pela primeira vez π com 100 casas decimais corretas.

A partir do século XX, com a utilização de computadores cada vez mais potentes e rápidos, o cálculo de π passou a ser efetuado com uma quantidade cada vez mais espantosa de casas decimais. Recentemente, em dezembro de 2002, um recorde foi batido no Japão com a ajuda de supercomputadores.

1.3.1 Fórmulas envolvendo π e a função arco-tangente

Vamos iniciar com dois exercícios resolvidos sobre trigonometria.

Exercício 1.1 Determine o valor de $y = \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{4}$

Solução: Sejam $a = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ e $b = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ o que implica em $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} b = \frac{1}{3}$. Devemos calcular o valor de $y = a + b$. Isso ficará fácil se soubermos quanto é $\operatorname{tg}(a + b)$.

Temos que $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$. Portanto, $\operatorname{tg} y = 1$ o que significa que $y = \frac{\pi}{4}$. Portanto,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

Essa fórmula escreve uma fração que envolve π como combinação linear de arcos-tangentes de determinados valores. Há um grande número de fórmulas como essa, outra delas aparece no próximo exercício.

Exercício 1.2 Seja β a medida de um ângulo tal que $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5}$. Calcule $\operatorname{tg}(2\beta)$, $\operatorname{tg}(4\beta)$ e $\operatorname{tg}(4\beta - \frac{\pi}{4})$.

Solução: Fazendo $a = b = \beta$ na fórmula de $\operatorname{tg}(a + b)$, obtemos:

$$\operatorname{tg}(2\beta) = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - (\frac{1}{5})^2} = \frac{5}{12}.$$

Fazendo $a = b = 2\beta$ na fórmula de $\operatorname{tg}(a + b)$, obtemos:

$$\operatorname{tg}(4\beta) = \frac{2 \operatorname{tg}(2\beta)}{1 - \operatorname{tg}^2(2\beta)} = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - (\frac{5}{12})^2} = \frac{120}{119}$$

que é próximo de 1 o que implica que 4β é próximo de $\frac{\pi}{4}$.

$$\operatorname{tg}(4\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg}(4\beta) + \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})}{1 - \operatorname{tg}(4\beta) \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{120}{119} - (-1)}{1 - (\frac{120}{119}) \cdot (-1)} = \frac{1}{239}$$

que é um valor próximo de zero, o que era de se esperar pois $(4\beta - \frac{\pi}{4})$ é próximo de zero (pelo item anterior deste mesmo exercício).

Portanto, $\operatorname{tg}(4\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239}$ que é equivalente a $4\beta - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$, ou seja, $4\beta - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$. Como $\beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$, obtemos finalmente que

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Essa fórmula é conhecida pelo nome de *fórmula de Machin* e foi utilizada em 1706 para calcular π com 100 casas decimais.

1.3.2 Série de potências da função arco-tangente

Se $|x| < 1$, então é conhecida há vários séculos a soma da seguinte série geométrica:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots = \frac{1}{1 + x^2}$$

Entre as várias operações permitidas com essa série, podemos calcular integral (no intervalo $[0, x]$) de cada termo da série:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots = \operatorname{arctg} x$$

Usando uma quantidade finita de termos dessa série anterior, podemos obter aproximações para o $\operatorname{arctg}(x)$, se $|x| < 1$. Por exemplo, se usarmos apenas os 5 primeiros termos da série, obtemos a seguinte aproximação:

$$\operatorname{arctg}(x) \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}.$$

Fazendo $x = \frac{1}{5}$, e depois $x = \frac{1}{239}$ nessa fórmula, obtemos:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{5} \approx \frac{1}{5} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^9}{9} = 0,1973955600$$

e

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{239} \approx \frac{1}{239} - \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{239}\right)^9}{9} = 0,0041840760$$

Substituindo na fórmula para $\pi/4$ anterior, obtemos:

$$\frac{\pi}{4} \approx 4 \times 0,1973955600 - 0,0041840760 = 0,7853981706,$$

e, finalmente, $\pi \approx 4 \times 0,7853981706 = 3,1415926824$.

1.3.3 Cálculo do valor de π ao longo dos séculos

A história da constante π se confunde com a própria história da Matemática. Ao longo dos séculos, muitos matemáticos importantes em algum momento de suas vidas se dedicaram ao cálculo dessa constante. A seguir, algumas tabelas que mostram a evolução desse cálculo com o passar do tempo.

O cálculo de π antes do uso de computadores

NOME	ANO	DÍGITOS
Egípcios	2000 A.C.	1
Babilônios	2000 A.C.	1
Hebreus	550 A.C.	1
Arquimedes	250 A. C.	3
Ptolomeu	150	3
Liu Hui	263	5
Tsu Chung Chi	480	7
Al-Kashi	1429	14
Romanus	1593	15
Van Ceulen	1615	35
Sharp & Halley	1699	71
Machin	1706	100
Strassnitzky & Dase	1844	200
Rutherford	1853	440
Shanks	1874	527

O cálculo de π com a utilização de computadores

NOME	ANO	DÍGITOS
Reitwiesner & outros (ENIAC)	1949	2.037
Genuys	1958	10.000
Shanks & Wrench	1961	100.265
Guilloud & Bouyer	1973	1.001.250
Miyoshi–Kanada	1981	2.000.036
Kanada–Yoshino–Tamura	1982	16.777.206
Gosper	1985	17.526.200
Bailey	Jan/1986	29.360.111
Kanada–Tamura	Out/1986	67.108.839
Kanada–Tamura	Jan/1988	201.326.551
Chudnovskys	Mai/1989	480.000.000
Kanada–Tamura	Jul/1989	536.870.898
Kanada–Tamura	Nov/1989	1.073.741.799
Chudnovskys	Ago/1991	2.260.000.000

NOME	ANO	DÍGITOS
Chudnovskys	Mai/1994	4.044.000.000
Kanada–Takahashi	Out/1995	6.442.450.938
Kanada–Takahashi	Jul/1997	51.539.600.000
Kanada–Takahashi	Set/1999	206.158.430.000
Kanada–Ushiro–Kuroda	Dez/2002	1.241.100.000.000

1.3.4 Curiosidade: frases que fornecem o valor de π

Antigamente, antes da década de 70, era muito comum a invenção de frases que ajudavam na memorização de diversas constantes ou fórmulas. Existem frases que fornecem o valor de π em uma grande variedade de idiomas. Basta lembrar da frase, contar as letras de cada palavra, que teremos o valor de π com um considerável número de casas decimais.

3,1415926

“ Com o júri a votar, ‘Disparada’ já ganhou. ”

$\underbrace{\text{Com}}_3, \underbrace{\text{o}}_1 \underbrace{\text{júri}}_4 \underbrace{\text{a}}_1 \underbrace{\text{votar,}}_5 \underbrace{\text{‘Disparada’}}_9 \underbrace{\text{já}}_2 \underbrace{\text{ganhou.}}_6$

“*Disparada*” é uma canção premiada no II Festival da Música Popular Brasileira da TV Record, em 1966, autoria de Geraldo Vandré e Theo de Barros.

3,1415926535

Aqui, é o próprio π dizendo para o menino que não gosta de estudar e, conseqüentemente, tem medo de π por causa das casas decimais:

“ — Sou o medo e pavor constante do menino vadio, bem vadio.”

Note que essa frase fornece π com 10 casas decimais: 3,1415926535.

3,14159265358

Uma frase com tema religioso que fornece o valor de π com 11 casas decimais:

“Ama a Deus e segue fielmente as lições dadas por Jesus Nazareno.”

3,14159265358979323846264...

E, finalmente, uma das muitas frases em inglês que fornece um grande número de decimais:

“How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard ...”

1.4 Exercícios Propostos

(P01) Utilizando uma calculadora, calcule os seguintes valores:

- $a = e^{-\frac{\pi}{2}} (= i^i)$ **Resp.: $a = 0,207879$**
- $b = \arctg(3/4) + \arctg(4/3)$ **Resp.: $b = \pi/2 = 1,570796$**
- $c = \left(1 + \frac{1}{500}\right)^{500}$ **Resp.: $c = 2,715568$**
- $d = \ln(\cos 1)$ **Resp.: $d = -0,615626$**
- $e = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$ **Resp.: $e = 2,000000$**

(P02) Sejam a', b' e c' os inteiros mais próximos de $a = \ln(\pi + 2)$, $b = \left(\frac{11e}{30} + \frac{5}{7}\right)^5$ e $c = 7 \operatorname{sen}(\sqrt{11})$. Calcule os erros absolutos Δ_a , Δ_b e Δ_c e os erros relativos δ_a , δ_b e δ_c cometidos quando substituirmos a', b', c' por a, b, c . **Resp.: $\Delta_a = 0,3626$, $\Delta_b = 0,3365$, $\Delta_c = 0,2189$, $\delta_a = 22,14\%$, $\delta_b = 2,29\%$, $\delta_c = 17,96\%$**

(P03) Um terreno de formato retangular foi medido com erros que não superaram 15 cm em cada medição. Sabendo que o comprimento e a largura encontrados foram 30 m e 14 m, respectivamente, obtenha uma estimativa para o erro no cálculo da área desse terreno. **Resp.: $\varepsilon \leq 6,6225 \text{ m}^2$.**

(P04) A aresta de uma caixa em forma de cubo é medida, e, devido à falta de precisão do instrumento utilizado, obteve-se uma aresta de 15 cm com erro no máximo igual a 2 cm. Determine o volume aproximado da caixa, um intervalo $[a, b]$ que contenha o valor do volume exato e uma estimativa para o erro do cálculo do volume. **Resp.: $[a, b] = [2197, 4913]$, $\varepsilon \leq 1538 \text{ cm}^3$.**

(P05) Considere a' e b' como sendo aproximações para a e b com erros absolutos inferiores a ε_1 e ε_2 , respectivamente. Mostre que ao aproximarmos $a - b$ por $a' - b'$ o erro cometido na aproximação é menor do que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

(P06) Seja $\theta = 23^\circ$ a medida em graus de um ângulo. Utilizando apenas os quatro primeiros termos da série de Taylor da função cosseno, calcule uma aproximação para $\cos \theta$ e uma estimativa para o erro cometido.

Resp.: $\cos 23^\circ \approx 0,920504867$, $\varepsilon \leq 1,67 \cdot 10^{-8}$

(P07) A função $f(x) = \ln(x + 1)$ com $|x| < 1$ possui o seguinte desenvolvimento em série de potências de x :

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$$

Utilizando os 6 primeiros termos dessa série, calcule $\ln(1,20)$ e uma estimativa para o erro da aproximação. **Resp.: $\ln(1,20) \approx 0,18232000$, $\varepsilon \leq 1,8 \cdot 10^{-6}$**

(P08) Consideremos ℓ_n como sendo o lado do polígono de n lados inscrito em uma circunferência de raio 1. Usando o Teorema de Pitágoras obtemos $\ell_4 = \sqrt{2}$ e $\ell_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\ell_n)^2}}$. Baseando-se nestas informações, calcule o lado e o perímetro de um polígono com 128 lados inscrito em uma circunferência de raio 1 (que é uma aproximação para 2π).

Resp.: $\ell_{128} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}} = 0,049082$, $P = 6,282554$.

(P09) A fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 44 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 7 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} - 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{682} + 24 \operatorname{arctg} \frac{1}{12943}$$

foi utilizada em dezembro de 2002 no Japão para calcular π com mais de um trilhão e duzentos bilhões de casas decimais. Utilizando esta fórmula e os dois primeiros termos do desenvolvimento em série de potências de $\operatorname{arctg} x$, calcule π com erro no máximo igual a 0,0000001.

Resp.: $\pi \approx 3,1415926595$.

(P10) a) Mostre que

$$\ln 2 = 10 \operatorname{arctgh} \frac{1}{17} + 4 \operatorname{arctgh} \frac{13}{499}$$

b) Usando a fórmula do item (a) e os três primeiros termos do desenvolvimento em série da função arco-tangente hiperbólica, calcule uma aproximação para $\ln 2$ (utilize 8 casas decimais nos cálculos). **Resp.: $\ln 2 \approx 0,693147177$.**

(P11) Sendo p, q, a, b, c, d inteiros positivos, sabe-se que

$$\ln p = \frac{2a}{ac - bd} \operatorname{arctgh} \left(\frac{p^c - q^b}{p^c + q^b} \right) + \frac{2b}{ac - bd} \operatorname{arctgh} \left(\frac{q^a - p^d}{q^a + p^d} \right).$$

Fazendo $p = 3, q = 2, a = 3, b = 8, c = 5, d = 2$ obtenha uma fórmula para $\ln 3$ escrito como combinação linear de arco-tangentes hiperbólicas e usando os quatro primeiros termos do desenvolvimento em série de potências de $\operatorname{arctgh}(x)$, calcule uma aproximação para $\ln 3$.

Resp.: $\ln 3 = 16 \operatorname{arctgh} \frac{1}{17} + 6 \operatorname{arctgh} \frac{13}{499} \approx 1,098612277$.

Capítulo 2

Resolução de Equações

2.1 Introdução

O cálculo de raízes de uma equação é uma atividade importante porque muitos problemas de natureza prática dependem dele. Por isso, é interessante ter técnicas que permitam determinar raízes para os mais diversos tipos de equações.

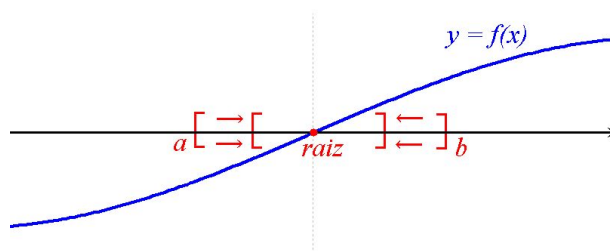
De um modo geral, as equações podem ser classificadas em algébricas ou transcendentais. As equações algébricas são aquelas que são polinomiais ou as que podem ser transformadas em polinomiais. Por exemplo $x^3 - 4x^2 + 5x - 10 = 0$ e $\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x + 5} = 7$ são exemplos de equações algébricas. As equações que não são algébricas são chamadas transcendentais, como por exemplo, $x^2 - \cos(x) = e^{x+1}$ e $2^x - 3x - \ln(x + 3) = 5$.

Existem fórmulas de resolução apenas para equações mais simples, de tipos bem particulares (como as equações de segundo grau, por exemplo). Portanto, resolver equações por fórmulas não é um método eficiente de resolução porque não abrange uma grande variedade de tipos de equações.

Neste capítulo, usaremos algoritmos para determinar uma raiz de uma equação que consistem em duas etapas:

- Isolamento da raiz
- Refinamento

O isolamento da raiz consiste em se determinar um intervalo $[a, b]$ que contenha uma raiz da equação no seu interior.



O refinamento consiste em redefinir o intervalo $[a, b]$ de modo a obtermos um intervalo de menor comprimento, mas que contenha ainda uma raiz da equação no seu interior.

Na etapa do isolamento da raiz, é bastante útil a utilização do seguinte teorema que usaremos sem a devida demonstração:

Teorema 2.1.1 *Se $f(x)$ for contínua em um intervalo $[a, b]$ de tal forma que $f(a)f(b) < 0$ (ou seja, que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários), então a equação $f(x) = 0$ possui pelo menos uma raiz no interior desse intervalo.*

2.2 Método da Bisseção

Dados $\varepsilon > 0$ e $f(x)$ contínua em $[a, b]$ com $f(a)f(b) < 0$, o método da bisseção para a determinação de uma raiz da equação $f(x) = 0$ consiste em ir dividindo o intervalo ao meio até que ele fique suficientemente pequeno; daí, escolhemos o ponto médio do intervalo como sendo uma raiz aproximada. Consiste em se executar os seguintes passos:

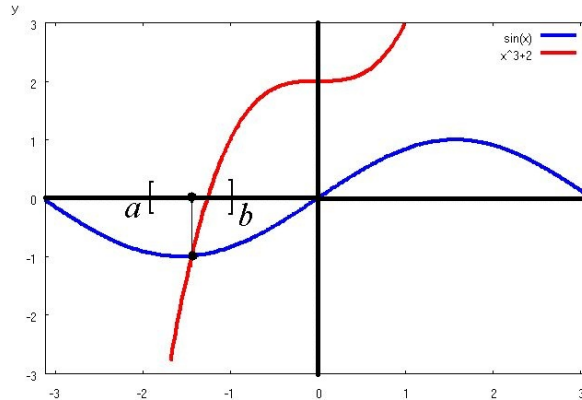
- (1) Calculamos $m = \frac{a+b}{2}$ o ponto médio do intervalo; se $f(m) = 0$ então m é uma raiz da equação e encerramos;
- (2) Se $\Delta = |b - a| < \varepsilon$, então dizemos que m é uma raiz aproximada da equação e encerramos;
- (3) Se os sinais de $f(a)$ e $f(m)$ coincidirem, então redefinimos $a = m$;
- (4) Se os sinais de $f(b)$ e $f(m)$ coincidirem, então redefinimos $b = m$;
- (5) Retornamos ao item (1).

Esse método faz uma *pesquisa binária* no intervalo $[a, b]$ em busca da raiz da equação. Tem alguma semelhança com o que fazemos quando procuramos uma palavra em um dicionário: primeiro abrimos o livro ao meio; depois, desprezamos uma das metades e abrimos ao meio de novo. E assim procedemos até encontrarmos a palavra.

Exemplo 2.1 *Determinar uma raiz da equação $x^3 - \sin x + 2 = 0$ com um erro inferior a $\varepsilon = 0,01$.*

Seja $f(x) = x^3 - \sin x + 2$. Inicialmente, determinamos um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários. Tentando várias possibilidades para a e b , obtemos $f(-2) = -5,0907 < 0$ e $f(-1) = 1,8414 > 0$. Logo, podemos escolher $[a, b] = [-2, -1]$.

Como a equação dada é equivalente a $x^3 + 2 = \sin x$, uma outra maneira de definir o intervalo $[a, b]$ é através da observação dos gráficos das funções $x^3 + 2$ e $\sin x$. Neste caso, a raiz da equação corresponde à abscissa x do ponto de encontro dos gráficos.



a	b	$m = \frac{a+b}{2}$	sinal de $f(m)$	$\Delta = b - a $
-2,0000	-1,0000	-1,5000	-	1,0000
-1,5000	-1,0000	-1,2500	+	0,5000
-1,5000	-1,2500	-1,3750	+	0,2500
-1,5000	-1,3750	-1,4375	+	0,1250
-1,5000	-1,4375	-1,4687	-	0,0625
-1,4687	-1,4375	-1,4531	-	0,0312
-1,4531	-1,4375	-1,4453	-	0,0156
-1,4453	-1,4375	-1,4414	-	0,0078

Paramos a construção da tabela assim que obtemos $\Delta = 0,0078 < \varepsilon$. Logo, a raiz aproximada encontrada foi o último m calculado que é $-1,4414$.

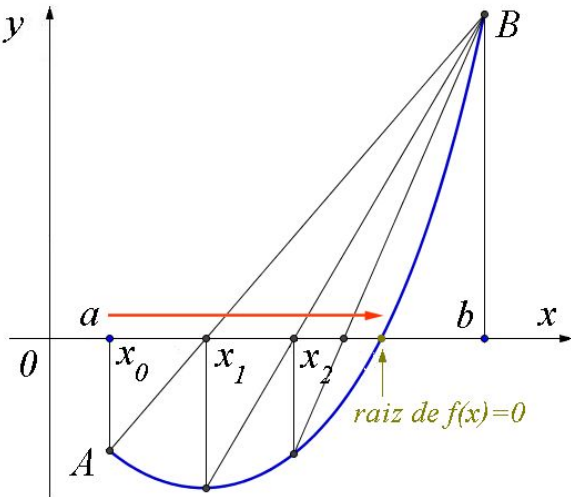
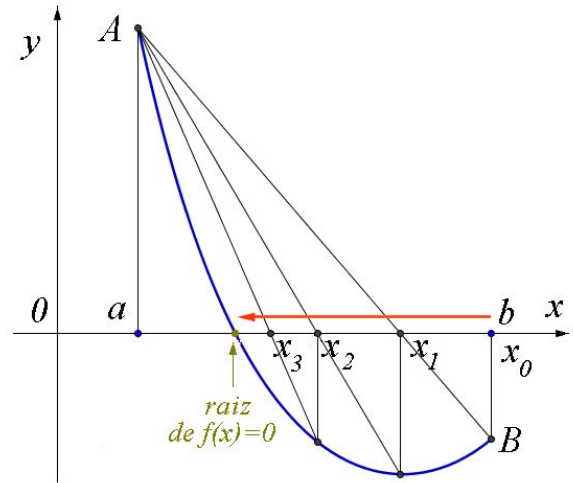
2.3 Método das Cordas

Suponhamos $f(x)$ duas vezes derivável em um intervalo $[a, b]$ de tal forma que $f(a)f(b) < 0$ e $f''(x)$ não mudando de sinal nesse intervalo.

O *método das cordas* para a determinação de uma raiz da equação $f(x) = 0$ consiste em aproximar a raiz por x_1 , a interseção do eixo $0x$ com o segmento de reta (corda) cujas extremidades são os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$. A partir daí, redefinimos a ou b como sendo igual a x_1 , repetimos a construção e obtemos um novo ponto x_2 , e depois, x_3, x_4 etc. Quando a sequência (x_n) converge, ela converge para uma raiz da equação $f(x) = 0$.

Consideraremos dois casos semelhantes: um caso 1 em que $f(a)f''(a) < 0$ e um caso 2 em que $f(a)f''(a) > 0$. No caso 1, definimos $x_0 = a$ e, no caso 2, $x_0 = b$.

A equação da reta que passa por A e B é $y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Fazendo $y = 0$ e $x = x_1$ e substituindo a por x_0 (no caso 1), obtemos $x_1 = x_0 + \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}(x_0 - b)$.

Figura 2.1: Caso 1: $f(a)f''(a) < 0$ Figura 2.2: Caso 2: $f(a)f''(a) > 0$

De modo análogo, obtemos $x_2 = x_1 + \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(x_1 - b)$ e, de modo geral, no caso 1, obtemos

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(x_n - b),$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

No caso 2, $x_0 = b$ e calculando a interseção da reta que passa por A e B com o eixo $0x$, obtemos $x_1 = x_0 + \frac{f(x_0)}{f(a) - f(x_0)}(x_0 - a)$ e, de um modo geral,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f(a) - f(x_n)}(x_n - a),$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Exemplo 2.2 Determinar uma raiz da equação $\operatorname{arctg} x = e^{-x}$ com um erro inferior a $\varepsilon = 0,0001 = 10^{-4}$.

Seja $f(x) = \operatorname{arctg} x - e^{-x}$. Por tentativas, escolhendo $a = 0$ e $b = 1$, obtemos: $f(a)f(b) = f(0)f(1) = (0 - 1)(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{e}) = -0,417518 < 0$. Logo, a equação possui raiz no interior do intervalo $[a, b] = [0, 1]$.

Derivando $f(x)$, obtemos $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + e^{-x}$ e $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} - e^{-x}$. Como $f(a)f''(a) = f(0)f''(0) = 1 > 0$ temos uma situação do caso 2 citado anteriormente. Portanto, $x_0 = b = 1$ e $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f(a) - f(x_n)}(x_n - a)$ para $n = 0, 1, 2, \dots$.

n	x_n	$\Delta = x_n - x_{n-1} $
0	1,000000	---
1	0,705458	0,294541
2	0,629593	0,075864
3	0,611797	0,017795
4	0,607741	0,004056
5	0,606825	0,000918
6	0,606615	0,000207
7	0,606569	0,000046 < ε

Portanto, a raiz aproximada é 0,606569.

2.4 Método da Iteração Linear

Consideremos uma equação da forma $f(x) = x$ onde $f(x)$ é contínua em um intervalo $[a, b]$ no qual a equação possui uma raiz. Dada uma aproximação inicial x_1 para uma raiz da equação, construímos a sequência recorrente definida por $x_n = f(x_{n-1})$ para $n = 2, 3, 4, \dots$:

$$(x_1, f(x_1), f(f(x_1)), f(f(f(x_1))), f(f(f(f(x_1))))), \dots)$$

Se (x_n) convergir para L , ou seja, se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) = L$ o que implica $f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = L$, isto é, $f(L) = L$. Logo, L é uma raiz da equação $f(x) = x$.

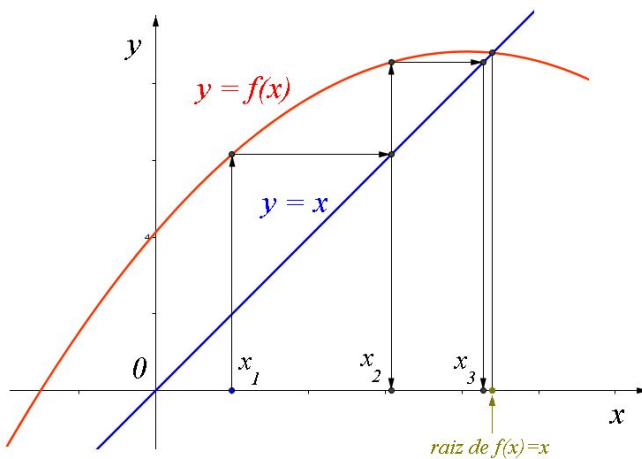


Figura 2.3: Caso 1: (x_n) converge

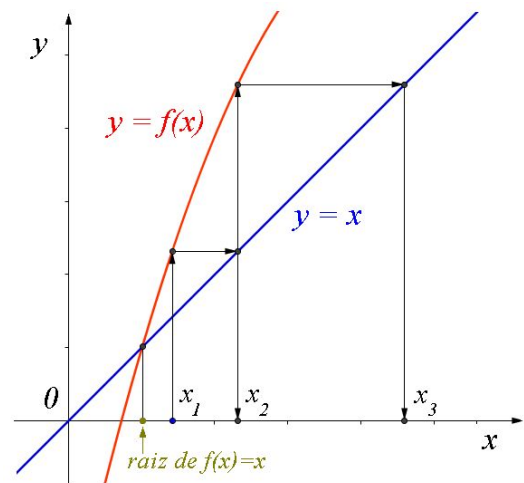


Figura 2.4: Caso 2: (x_n) não converge

Temos dois casos a considerar:

- Caso 1: $|f'(x_1)| < 1$. Neste caso, a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ tem inclinação menor do que a da reta $y = x$. Neste caso, a sequência (x_n) **converge** para uma raiz da equação $f(x) = x$. Veja Figura 2.3.
- Caso 2: $|f'(x_1)| > 1$. Neste caso, a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ tem inclinação maior do que a da reta $y = x$. Neste caso, a sequência (x_n) **não converge** para uma raiz da equação $f(x) = x$. Veja Figura 2.4.

Exemplo 2.3 Determine uma raiz da equação $x^3 + 2x - 5 = 0$ com um erro inferior a $\varepsilon = 0,001$.

Seja $F(x) = x^3 + 2x - 5$. Por tentativas, obtemos $F(0) \cdot F(2) < 0$. Logo, a equação possui raiz no interior do intervalo $[0, 2]$. Escolhemos $x_1 = 1$ nesse intervalo como sendo a primeira aproximação da raiz.

Agora, para definir o $f(x)$, precisamos “isolar” o valor de x a partir da equação dada. Existem muitas possibilidades de se fazer isso. Duas delas são as seguintes:

- $x = \frac{5 - x^3}{2}$.
- $x = \sqrt[3]{5 - 2x}$.

No primeiro caso, definimos $f(x) = \frac{5 - x^3}{2}$. Temos $f'(x) = -3x^2/2$ e, daí, $|f'(x_1)| = |f'(1)| = 3/2 > 1$. Logo, neste caso, a sequência construída a partir de x_1 e $f(x)$ não converge para uma raiz da equação. Assim, abandonamos esta opção.

No segundo caso, definimos $f(x) = \sqrt[3]{5 - 2x} = (5 - 2x)^{\frac{1}{3}}$. Logo, $f'(x) = \frac{-2}{3}(5 - 2x)^{-\frac{2}{3}}$, e daí, $|f'(x_1)| = |f'(1)| = \frac{2}{3} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} = 0,320499 < 1$. Logo, neste caso, a sequência construída a partir de x_1 e $f(x)$ converge para uma raiz.

Construímos assim a seguinte tabela:

n	x_n	$\Delta = x_n - x_{n-1} $
1	1,00000	---
2	1,44224	0,44224
3	1,28372	0,15852
4	1,34489	0,06117
5	1,32195	0,02293
6	1,33064	0,00869
7	1,32736	0,00328
8	1,32860	0,00124
9	1,32814	0,00046 < ε

Portanto, uma raiz aproximada da equação dada é 1,32814.

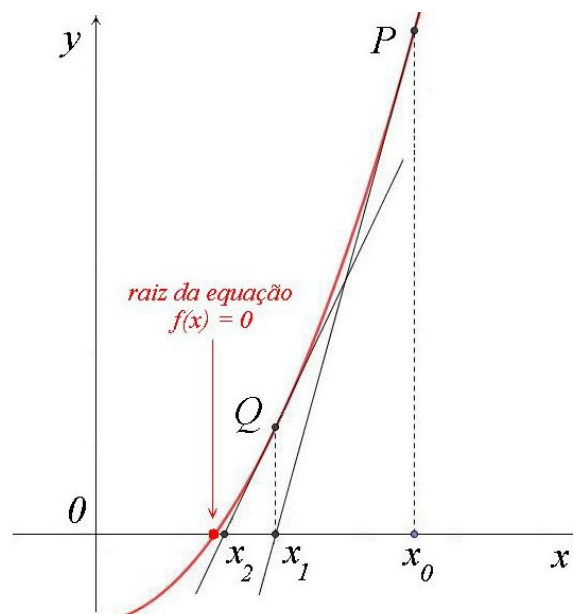
2.5 Método de Newton

Entre os métodos mais elementares para resolução numérica de uma equação, o método de Newton se destaca pela sua simplicidade e eficiência.

O inglês Isaac Newton (1643 – 1727) é considerado um dos maiores gênios da Matemática de todos os tempos, além de também ser físico, astrônomo, filósofo e teólogo. Sua imagem ainda hoje aparece nas notas de 1 libra esterlina da Inglaterra.



Seja $f(x)$ derivável em um intervalo $[a, b]$ que contém uma raiz da equação $f(x) = 0$. Consideremos x_0 um ponto desse intervalo que seja uma aproximação para uma raiz da equação. O método de Newton (também conhecido como Newton-Raphson) consiste em calcular uma nova aproximação a partir de x_0 como sendo a abscissa do ponto de interseção do eixo dos x com a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P = (x_0, f(x_0))$.



A equação da reta tangente em P é $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Substituindo $y = 0$ e $x = x_1$ nessa equação, obtemos $0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$ e daí

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

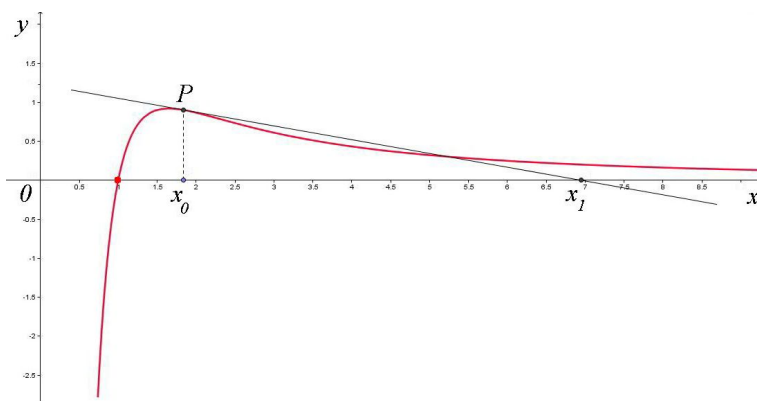
Podemos repetir esse tipo de construção para obtemos x_2 a partir de x_1 dado por $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, e, de modo semelhante: $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$. De um modo geral:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

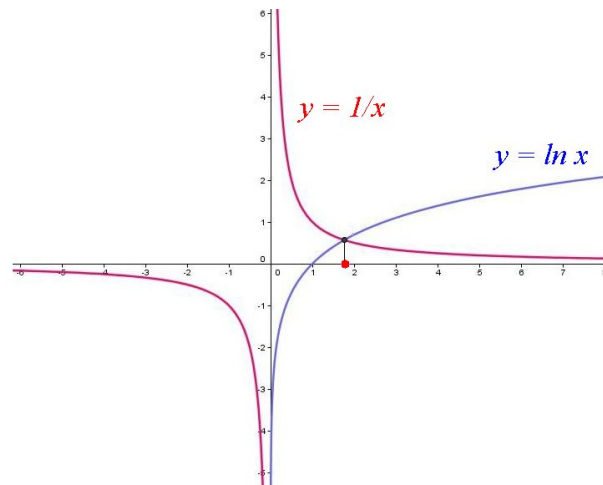
Observação

Consideremos a função $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ (veja gráfico a seguir). Uma raiz da equação $f(x) = 0$ claramente é $x = 1$. No entanto se tentarmos utilizar o método de Newton partindo da aproximação inicial $x_0 = 1,84$ (escolhido aleatoriamente), obtemos que $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 1,84 - 0.1801/(-0,0352) = 6,9507$. Sendo assim, o método de Newton não funciona neste caso pois o x_0 estava próximo da raiz da equação e, no entanto, o x_1 ficou muito distante.



Exemplo 2.4 Determinar uma raiz da equação $x \ln x = 1$ com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-6}$.

A equação dada é equivalente a $\ln x = \frac{1}{x}$. Os gráficos de $y = \ln x$ e $y = 1/x$ são mostrados na seguinte figura:



Logo, a equação tem uma raiz no intervalo $[1, 3]$. Alternativamente, podemos também concluir isso definindo $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ e observando que $f(1) < 0$ e $f(3) > 0$.

Escolhemos um número qualquer do interior do intervalo $[1, 3]$, por exemplo, $x_0 = 2$.

Usando que $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, aplicamos a fórmula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ até que $\Delta = |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ e construímos a seguinte tabela:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Δ
0	2,000000000	0,1931471806	0,7500000000	— — —
1	1,742470426	-0,0185939408	0,9032565539	0,257529574
2	1,763055874	-0,0001484030	0,8889094336	0,020585448
3	1,763222824	-0,0000000009	0,8887948093	0,000166950
4	1,763222834	-0,0000000003	0,8887948025	0,00000010 < ε

Portanto, a raiz aproximada é 1,763222834.

Exemplo 2.5 Determinar uma raiz da equação $x^5 - x - 3 = 0$ com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-4}$.

Seja $f(x) = x^5 - x - 3$. Por tentativas, obtemos: $f(1) = -3 < 0$ e $f(2) = 27 > 0$. Logo, a equação tem uma raiz no interior do intervalo $[1, 2]$. Como $|f(2)|$ é muito maior do que $|f(1)|$, isso significa que a raiz está mais próxima de 1 do que de 2. Escolhemos, finalmente, $x_0 = 1,2$ como sendo a aproximação inicial da raiz da equação.

Aplicando a fórmula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ até que $\Delta < \varepsilon$, construímos a seguinte tabela :

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Δ
0	1,200000	-1,711680	9,368000	— — —
1	1,382716	0,671630	17,276876	0,182716
2	1,343841	0,038844	15,306530	0,038875
3	1,341303	0,000148	15,183691	0,002538
4	1,341293	— — —	— — —	0,000010 < ε

Portanto, a raiz aproximada é 1,341293. Note que não há necessidade de calcular $f(x_4)$ e nem $f'(x_4)$ porque esses valores serviriam apenas para os cálculos da próxima linha da tabela.

Exemplo 2.6 Determinar uma raiz da equação $x^4 - 4x^2 + 7x - 11 = 0$ com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-5}$.

Seja $f(x) = x^4 - 4x^2 + 7x - 11$. Por tentativas, obtemos: $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$. Logo, a equação tem uma no interior do intervalo $[1, 2]$. Escolhemos $x_0 = 1,5$ como sendo uma aproximação da raiz da equação.

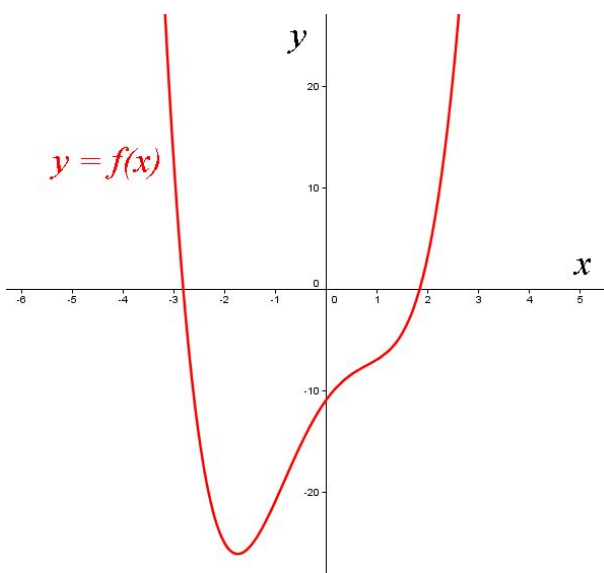
Aplicando várias vezes a fórmula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, constituímos a seguinte tabela:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Δ
0	1,500000	-4,437500	8,500000	— — —
1	2,022059	3,517171	23,894074	0,522058
2	1,874860	0,419555	18,362414	0,147198
3	1,852012	0,008833	17,593120	0,022848
4	1,851510	0,000042	17,576477	0,000500
5	1,851509	-0,000000	17,576469	0,000002 $< \varepsilon$

Portanto, a raiz aproximada é 1,851509. Note que não há necessidade de calcular $f(x_5)$ e nem $f'(x_5)$.

Observação:

O gráfico de $f(x)$ é



Percebe-se na observação do gráfico que a equação $f(x) = 0$ tem duas raízes reais. Essas raízes reais são $-2,808412$ e $1,851509$. Como trata-se de uma equação do quarto grau, ela ainda tem mais duas raízes complexas: $0,478451 \pm i 1,373517$.

Exemplo 2.7 Dada uma constante $a > 0$, determine uma sequência (x_n) que convirja para \sqrt{a} .

Sendo $x = \sqrt{a}$, temos $x^2 = a$, ou seja, $x^2 - a = 0$. Seja $f(x) = x^2 - a$. Então, a é raiz da equação $f(x) = 0$, e, usando o método de Newton, podemos definir uma sequência que converge para essa raiz.

A partir de $f(x) = x^2 - a$, obtemos $f'(x) = 2x$ e daí $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$, o que pode ser simplificado da seguinte forma: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} + \frac{a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$, de onde finalmente obtemos

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Escolhemos x_0 como sendo uma aproximação inicial da raiz, por exemplo, $x_0 = 1$.

Poderíamos usar um desenvolvimento semelhante a esse para encontrarmos sequências que convergem para $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, ...

Observações

- A quantidade de zeros na parte fracionária do Δ , antes do primeiro algarismo diferente de zero, no mínimo dobra a cada passo. Por causa disso, dizemos que o método de Newton tem *convergência quadrática*.
- Existem vários métodos mais recentes, mais sofisticados e mais eficientes do que o método de Newton. Mas, esses métodos são mais complicados. Por exemplo, o método de Householder propõe que a sequência (x_n) seja construída a partir da fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left(1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2} \right).$$

- Apesar de ter sido elaborado para funções de uma variável real, o método de Newton funciona também com números complexos. Por exemplo, a equação $x^4 + x^2 + 2 = 0$ não possui raízes reais. No entanto, o método de Newton fornece para essa equação a raiz complexa $0,97831834 + i 0,67609672$, com apenas 6 iterações a partir da aproximação inicial $x_0 = 1 + i$.

2.6 Comparando os diversos métodos

Todos os métodos estudados são eficientes no sentido de resolverem uma grande variedade de equações. No entanto, uns métodos são mais eficientes do que outros pois resolvem o mesmo

problema usando uma quantidade menor de passos (iterações) e, conseqüentemente, são mais rápidos.

Implementamos usando o Maxima (maxima.sourceforge.net) os métodos estudados e determinamos uma raiz da equação do quinto grau

$$x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 1 = 0$$

que está no intervalo $[a, b] = [0, \frac{1}{2}]$ com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-8}$. Em todos os casos a raiz obtida foi 0,19335536. O desempenho de cada método está resumido na seguinte tabela.

Método	Bisseção	Cordas	Iter. Linear	Newton	Householder
N. iterações	26	8	7	4	3

Se tivéssemos usado outra equação, teríamos obtido resultado parecido com esse.

2.7 Exercícios Propostos

(P12) a) Usando o Método de Newton, escreva uma fórmula de recorrência de uma sequência de **coeficientes de x_n inteiros** que convirja para $\alpha = \sqrt{5 - \sqrt{3}}$.

Resp.: $x_0 = 1, x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 10x_n^2 + 22}{4x_n^3 - 20x_n}$

b) Usando a sequência do item (a), partindo de $x_0 = 1$, calcule o valor de α com um erro no máximo igual a $\varepsilon = 10^{-4}$. Resp.: $\alpha \approx 1,807747$.

(P13) Deduza uma fórmula de recorrência para calcular a raiz cúbica de um número real. Use a fórmula obtida para calcular $\sqrt[3]{7}$ com erro inferior a 10^{-6} .

Resp.: $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right), \sqrt[3]{7} \approx 1,91293118$.

(P14) Deduza uma fórmula de recorrência que permita calcular $\sqrt[s]{a}$ para qualquer número real positivo a e qualquer índice $s \geq 2$. Resp.: $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{s} \left((s-1)x_n + \frac{a}{x_n^{s-1}} \right)$.

(P15) Em cada caso a seguir, encontre um intervalo $[a, b]$ tal que a função $f(x)$ assumira valores com sinais opostos nas extremidades (isto é, $f(a)f(b) < 0$)

a) $f(x) = \ln(x-1) + x - 3$ b) $f(x) = e^x - x^2$ c) $f(x) = 2x^5 - 4x^2 + 11$

Resp.: a) $[2, 3]$ b) $[-1, 0]$ c) $[-2, 0]$.

(P16) A equação $f(x) = 2x \operatorname{sen}(4x) - 3 = 0$ possui uma infinidade de raízes (veja o gráfico de $f(x)$ na Figura 2.5). Determine pelo menos uma dessas raízes com um erro no máximo igual a 10^{-3} usando o método da bisseção. Resp.: $\pm 1,81415823$ ou $\pm 2,16481917$, etc.

(P17) Na Figura 2.6 está representada a função $f(x) = x^5 - 8x + 3$. Determine pelo menos uma das raízes da equação $x^5 - 8x + 3 = 0$ com erro inferior a $\varepsilon = 10^{-4}$ usando o método das cordas.

Resp.: $-1,76478607$ ou $0,37593863$ ou $1,57094136$.

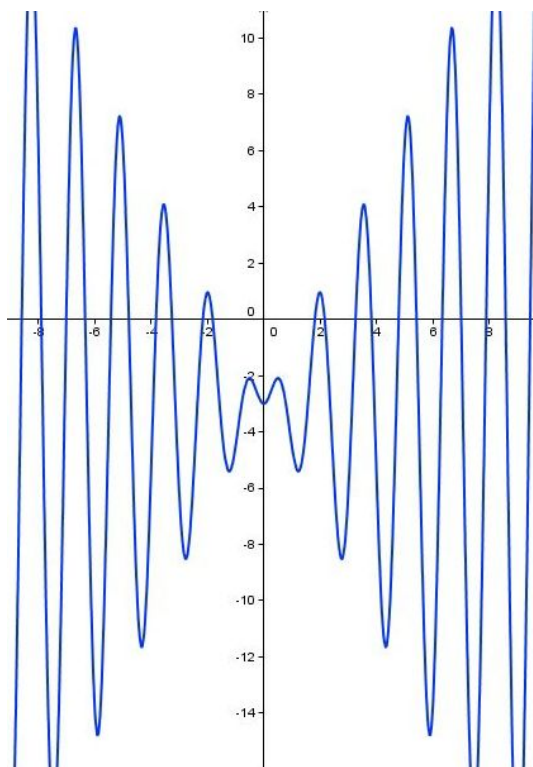


Figura 2.5: Exercício 16

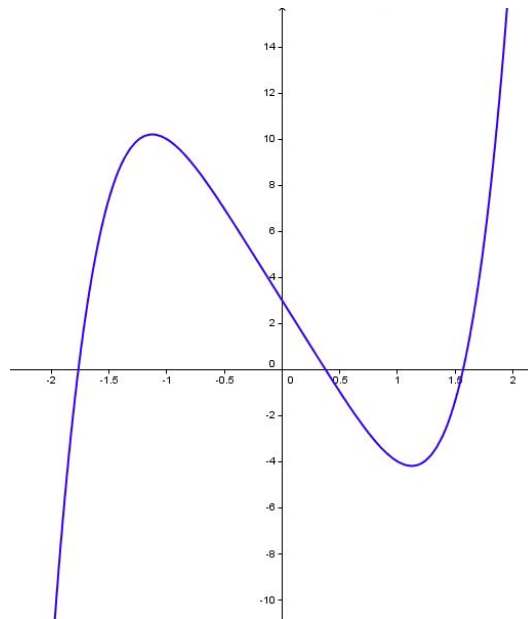


Figura 2.6: Exercício 17

(P18) A equação $2^x = x^2$ possui três raízes reais $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ e $x_3 < 0$. Determine a raiz x_3 com um erro inferior a 10^{-6} . **Resp.: $x_3 \approx -0,766664695$.**

(P19) Através de uma mudança de variável, toda equação polinomial do terceiro grau pode ser reduzida à forma $x^3 + px + q = 0$ cuja solução exata pode ser calculada através da fórmula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (*)$$

Considerando a equação $x^3 + 3x - 11 = 0$, calcule uma raiz real de duas maneiras:

- utilizando a fórmula de resolução (*) citada anteriormente;
- utilizando o método de Newton a partir de $x_0 = 2$ com $\varepsilon = 10^{-5}$. **Resp.: 1,781618.**

(P20) A equação $e^x = \operatorname{tg} x$ possui uma infinidade de soluções reais. Usando um dos métodos estudados, determine uma das soluções com um erro inferior a 0,0001. **Resp.: 1,306327.**

(P21) Usando o método de Newton, determine uma raiz da equação

$$2x^3 + \ln(x) = 5$$

com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-7}$. **Resp.: 1,330839542**

(22) Sendo f uma função derivável com derivada contínua, ao tentarmos resolver uma equação $f(x) = 0$ pelo método de Newton, se usássemos equivocadamente a fórmula de recorrência

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)},$$

supondo a convergência da seqüência, seria encontrado raiz de qual equação? (Sugestão: calcule os limites quando $n \rightarrow \infty$). **Resp.: É encontrado raiz de $f'(x) = 0$**

(23) O método de Householder para determinação de uma raiz da equação $f(x) = 0$ consiste em verificar para qual valor a seqüência

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2} \right]$$

converge. Usando esse método, determine a raiz da equação

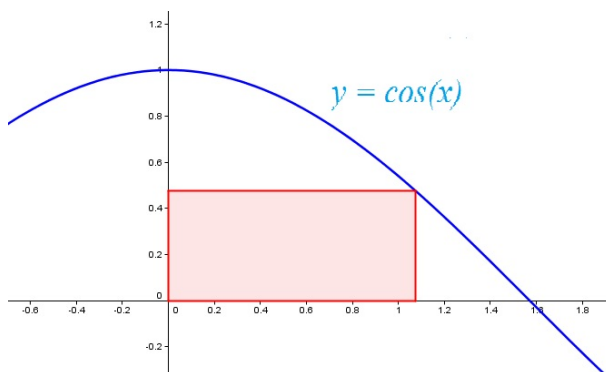
$$x^5 - 3x^3 + 5x - 11 = 0$$

que está no intervalo $[1, 2]$, com um erro inferior a $\varepsilon = 10^{-6}$. **Resp.: 1, 82055450**

(24) Sendo $a \neq 0$, aplicando o método de Newton à função $f(x) = \frac{1}{x} - a$, mostre que se a seqüência recorrente definida por $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$ for convergente, então ela converge para $\frac{1}{a}$.

(25) Determine a área máxima de um retângulo que possa ser inscrito na região do primeiro quadrante delimitada pelos eixos coordenados e pelo gráfico da função $y = \cos(x)$.

Resp.: $A_{max} = 0,561096338$



(26) Em uma calculadora ajustada em radianos, ao pressionarmos várias vezes a tecla $\boxed{\cos}$ da função cosseno, aparecerá no visor uma seqüência de valores que converge para 0,73908513. Esse valor é raiz de qual equação? **Resp.: $\cos(x) = x$**

Capítulo 3

Sistemas Lineares

3.1 Sistemas Lineares

Um sistema de equações é denominado *linear* quando todas as equações são polinomiais do primeiro grau. Por exemplo, $\begin{cases} 3x - 7y = 2 \\ 5x + 6y = 10 \end{cases}$ é linear, enquanto que $\begin{cases} 5x^2 - 2y = -1 \\ 5x + 6y^3 = 1 \end{cases}$ não o é.

3.2 Método de Eliminação de Gauss

O alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) é considerado por muitos como o maior gênio de toda a história da Matemática.



Entre as muitas fórmulas e teoria matemática que ele elaborou, descrevemos aqui uma técnica simples e eficiente para resolução de sistemas lineares.

O método de eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema linear em outro equivalente (de mesma solução) que tenha matriz dos coeficientes no formato triangular superior, como por

exemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

A partir daí, calculamos os valores de x_1, x_2, \dots, x_n de baixo para cima:

$$x_n \rightarrow x_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$$

Primeiro calculamos x_n na última equação. Depois, substituímos na penúltima e calculamos x_{n-1} . Por último, substituímos x_n, x_{n-1}, \dots, x_2 na primeira equação e calculamos x_1 .

Para transformar o sistema linear no formato triangular superior, podemos usar operações elementares com as linhas:

- Trocar a linha i pela linha j . Em símbolos: $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Substituir a linha i pela mesma linha multiplicada por uma constante $k \neq 0$. Em símbolos: $L_i = kL_i$.
- Substituir a linha i pela soma dela com outra linha j . Em símbolos: $L_i = L_i + L_j$.

É permitido fazer várias operações elementares de uma única vez, como em $L_i = aL_i + bL_j$, bem como subtrair linhas ou dividir uma linha por uma constante: $L_i - L_j = L_i + (-1)L_j$ e $\frac{L_i}{k} = (\frac{1}{k})L_i$.

É recomendável (mas não obrigatório) que o primeiro coeficiente não nulo de cada linha seja igual a 1. Sendo assim, se o primeiro elemento não nulo da linha i for $a_{ij} \neq 1$, então podemos utilizar operações do tipo $L_k = L_k - a_{kj}L_i$ para $k = i + 1, i + 2, i + 3, \dots$

Exemplo 3.1 Determinar a solução de

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 17 \\ x - 7y + 2z = 17 \\ 5x + 8y - z = -2 \end{cases}$$

Solução: Efetuamos as seguintes operações com as linhas do sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 17 & (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ x - 7y + 2z = 17 \\ 5x + 8y - z = -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 7y + 2z = 17 \\ 2x + 3y + 4z = 17 & (L_2 = L_2 - 2L_1) \\ 5x + 8y - z = -2 & (L_3 = L_3 - 5L_1) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 7y + 2z = 17 \\ 17y = -17 & (L_2 = \frac{1}{17}L_2) \\ 43y - 11z = -87 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & \begin{cases} x - 7y + 2z = 17 \\ y = -1 \\ 43y - 11z = -87 \end{cases} \quad (L_3 = L_3 - 43L_2) \\ \rightarrow & \begin{cases} x - 7y + 2z = 17 \\ y = -1 \\ -11z = -44 \end{cases} \end{aligned}$$

Note que obtivemos um formato triangular para o sistema, que o x foi eliminado da segunda e terceira equações e que o y foi eliminado da terceira equação.

Da última equação obtemos: $-11z = -44$, ou seja, $z = 4$. Da segunda equação obtemos $y = -1$ e substituindo os valores de y e z na primeira equação, obtemos finalmente que $x = 17 + 7y - 2z = 17 - 7 - 8 = 2$. Portanto a solução do sistema é $x = 2, y = -1, z = 4$.

Exemplo 3.2 Determinar a solução de

$$\begin{cases} 3x + y + z + w = 6 \\ 2x - 3y - 3z - w = -2 \\ x - y + 4z + 5w = -11 \\ 2x + 2y - z - 10w = 37 \end{cases}$$

Solução: No exemplo anterior, escrevemos todas as variáveis em todos os passos da solução. Isso não era necessário pois bastava escrever os coeficientes de cada equação. Portanto, neste exemplo, vamos ser um pouco mais econômicos e escrever apenas a matriz dos coeficientes das equações do sistema. E depois, vamos fazer operações elementares com as linhas dessa matriz.

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 2 & 2 & -1 & -10 & 37 \end{bmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_3) \rightarrow \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 2 & -3 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & -10 & 37 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} & (L_2 = L_2 - 2L_1) \\ & (L_3 = L_3 - 3L_1) \\ & (L_4 = L_4 - 2L_1) \end{aligned} \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 0 & -1 & -11 & -11 & 20 \\ 0 & 4 & -11 & -14 & 39 \\ 0 & 4 & -9 & -20 & 59 \end{bmatrix} \quad (L_2 = (-1)L_2) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 0 & \boxed{1} & 11 & 11 & -20 \\ 0 & 4 & -11 & -14 & 39 \\ 0 & 4 & -9 & -20 & 59 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} & (L_3 = L_3 - 4L_2) \\ & (L_4 = L_4 - 4L_2) \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 11 & 11 & -20 \\ 0 & 0 & -55 & -58 & 119 \\ 0 & 0 & -53 & -64 & 139 \end{bmatrix} \quad (L_3 = (-\frac{1}{55})L_3)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 11 & 11 & -20 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{58}{55} & -\frac{119}{55} \\ 0 & 0 & -53 & -64 & 139 \end{bmatrix} \quad (L_4 = L_4 + 53L_3)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 11 & 11 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{58}{55} & -\frac{119}{55} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{446}{55} & \frac{1338}{55} \end{bmatrix} \quad \text{que é uma matriz no formato triangular superior: em cada}$$

linha, os elementos que estão abaixo do primeiro elemento não nulo são todos iguais a zero. Essa matriz é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z + 5w = -11 \\ y + 11z + 11w = -20 \\ z + \frac{58}{55}w = -\frac{119}{55} \\ -\frac{446}{55}w = \frac{1338}{55} \end{cases}$$

- A quarta equação é $-\frac{446}{55}w = \frac{1338}{55}$, de onde obtemos $w = -3$.
- A terceira equação é $z + \frac{58}{55}w = -\frac{119}{55}$, o que fornece $z = -\frac{58}{55} \cdot (-3) - \frac{119}{55} = 1$.
- Da segunda equação, obtemos $y = -11z - 11w - 20 = -11 + 33 - 20 = 2$.
- Da primeira equação, temos $x = y - 4z - 5w - 11 = 2 - 4 + 15 - 11 = 2$.

Portanto, a solução do sistema é $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$ e $w = -3$.

Exemplo 3.3 Determinar a solução geral de

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - w = 2 \\ 3x - y + 3z + 4w = 9 \\ x + 2y + 3z + 4w = 10 \end{cases}$$

Solução: A matriz completa desse sistema é $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$. Efetuamos a seguinte sequência de operações elementares com as linhas da matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_3) \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 3 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (L_2 = L_2 - 3L_1) \\ (L_3 = L_3 - 2L_1) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -7 & -6 & -8 & -21 \\ 0 & -5 & -4 & -9 & -18 \end{bmatrix} \quad (L_2 = -\frac{1}{7}L_2) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{6}{7} & \frac{8}{7} & 3 \\ 0 & -5 & -4 & -9 & -18 \end{bmatrix} \quad (L_3 = L_3 + 5L_2) \\ & \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{8}{7} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{23}{7} & -3 \end{bmatrix} \text{ que é uma matriz no formato triangular superior e que corresponde} \\ & \text{ao sistema} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 10 \\ y + \frac{6}{7}z + \frac{8}{7}w = 3 \\ \frac{2}{7}z - \frac{23}{7}w = -3 \end{cases}$$

Como o sistema tem mais variáveis do que equações, alguma variável tem que ficar livre, ou seja, sem ser calculada. Escolhemos uma das variáveis para ficar livre. Por exemplo, podemos escolher w como variável livre do sistema. Isso significa que x, y, z ficam escritos em função de w .

- A última equação do sistema é $\frac{2}{7}z - \frac{23}{7}w = -3$ de onde obtemos $z = \frac{-21 + 23w}{2}$
- A segunda equação é $y + \frac{6}{7}z + \frac{8}{7}w = 3$ de onde obtemos $y = 3 - \frac{6}{7}z - \frac{8}{7}w$, ou seja, $y = 3 - \frac{6}{7}\left(\frac{-21 + 23w}{2}\right) - \frac{8}{7}w = \frac{84 - 77w}{7}$.
- A primeira equação é $x + 2y + 3z + 4w = 10 \Rightarrow x = 10 - 2y - 3z - 4w$. Substituindo os valores de y e z obtidos anteriormente e simplificando, obtemos $x = \frac{245 - 231w}{14}$.

Portanto, a solução geral do sistema é $x = \frac{245 - 231w}{14}$, $y = \frac{84 - 77w}{7}$, $z = \frac{-21 + 23w}{2}$, $\forall w \in \mathbb{R}$. Escolhendo valores para w , obtemos soluções particulares do sistema. Por exemplo, para $w = 1$, obtemos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$ como solução particular. Para $w = 0$, obtemos $x = \frac{245}{14}$, $y = \frac{84}{7}$ e $z = \frac{-21}{2}$ como sendo outra solução particular.

3.3 Exercícios Propostos

(P27) a) Dê exemplo de um sistema linear com 4 equações nas variáveis x, y, z e t cuja única solução seja $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ e $t = 4$.

b) Resolva o sistema do item (a) usando o método de eliminação de Gauss.

Resp.: Inicialmente, escrevemos aleatoriamente os primeiros membros de quatro equações nas variáveis x, y, z, t :

$$\begin{cases} 5x + y + 10z - 3t = \dots \\ 7x - 2y - 2z - 5t = \dots \\ -3x + 4y + z + t = \dots \\ -x - y - z + 14t = \dots \end{cases}$$

Para o sistema ter solução única deve-se ter o cuidado de não escrever uma equação como combinação linear das outras e nem a matriz-coluna formada pelos coeficientes de uma variável não ser combinação linear das matrizes-colunas dos coeficientes das outras variáveis. Depois, substituímos a solução desejada $x = 1, y = 2, z = 3, t = 4$ nas equações acima e obtemos o exemplo desejado:

$$\begin{cases} 5x + y + 10z - 3t = 25 \\ 7x - 2y - 2z - 5t = -23 \\ -3x + 4y + z + t = 12 \\ -x - y - z + 14t = 50 \end{cases}$$

(P28) Encontre a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 4x + 2y + z - 2t = 3 \\ 3x - 3y - z - t = 2 \\ 3x + 5y + z + t = 0 \\ x - y - z + 4t = -2 \end{cases}$$

usando o método de eliminação de Gauss. Resp.: $x = 6/13, y = -5/13, z = 1, t = -6/13$.

(29) Encontre a solução geral do sistema

$$\begin{cases} 4x + 2y + z + w = 13 \\ 3x - 3y - t + w = 5 \\ x + 5y + z + t = 8 \\ 2x - z + 4t - 5w = 0 \end{cases}$$

usando o método de eliminação de Gauss.

Resp.: $x = \frac{-10t + 10w + 49}{24}, y = \frac{-6t + 6w + 3}{8}, z = \frac{-38t + 50w - 49}{12}, \forall t, w \in \mathbb{R}$.