5. Derivadas: aplicações

5.1 Máximos e Mínimos

5.1A Se $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$, encontre o número c que satisfaz a conclusão do *TVM* (Teorema do Valor Médio) no intervalo $[1, 8]$.

5.1B Seja $f(x) = |x - 1|$. Mostre que não existe um número c satisfazendo $3f'(c) = f(3) - f(0)$. Isso contradiz o TVM?

5.1C Considere $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Verifique que $f(-1) = f(1)$, mas não existe um número $c \in]-1, 1[$, satisfazendo $f'(c) = 0$. Isso contradiz o *Teorema de Rolle*? Por que?

5.1D Prove que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real. (*sug.*: você está diante de um problema de *existência* e *unicidade*. A existência é comprovada pelo *TVI* e a unicidade é obtida como conseqüência do *Teorema de Rolle*, utilizando-se, para tanto, um argumento de contradição).

5.1E Prove que existe um único número real x talque $e^x + x = 0$.

5.1F Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b) e $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, mostre que f é uma função constante. (*sug.*: considere x_1 e x_2 em $[a, b]$ e aplique o *TVM* à função f em $[x_1, x_2]$).

5.1G Mostre que $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \pi/2$. (*sug.*: mostre que a função $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x$ é constante e, então, calcule $f(1)$).

5.1H Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é diferenciável em (a, b) e $f'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$, mostre que existe uma constante C tal que $f(x) = Ce^x$, $\forall x \in [a, b]$. (*sug.*: verifique que a função $\varphi(x) = f(x)\, e^{-x}$ é constante).

5.1I Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Se ambas são diferenciáveis em (a, b) e $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$, mostre que essas funções diferem por uma constante, isto é, $f(x) = g(x) + C$.

5.1J Considere $g(x) = x^4 - 4x + 1$. Encontre a função f que satisfaz $f'(x) = g'(x)$ e $f(1) = 2$.

5.1K Mostre que $e^x > x$, para $x > 0$. Mostre, em seguida, que $e^x > 1 + x + x^2/2$, com a mesma restrição $x > 0$. Use o processo indutivo para provar, em geral, que:

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \text{ para } x > 0. \tag{5.1}$$

E se $x \le 0$ a desigualdade (5.1) continua válida?

5.1L Mostre que $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, seja qual for o $x > 0$.

5.1M Mostre que $\operatorname{sen} x < x$, seja qual for o $x > 0$.

5.1N Mostre que a equação $x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x = 0$ tem duas e somente duas raízes, uma negativa e a outra positiva.

5.1O Mostre que $\theta < \operatorname{tg} \theta$, para $0 < \theta < \pi/2$.

5.1P Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

(a) Decida sobre a existência de máximos ou mínimos locais e absolutos de f;

(b) Calcule os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[-2, 3]$ e determine os pontos nos quais esses valores são assumidos.

5.1Q Considere a função $\varphi(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$.

(a) Decida sobre a existência de máximos ou mínimos locais e absolutos de f;

(b) Calcule os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[0, 3]$ e determine os pontos nos quais esses valores são assumidos;

(c) Repita o ítem (b), considerando o intervalo $[1/2, 3]$;

(d) Repita o ítem (b), considerando o intervalo $[1/2, 5/2]$;

(e) Repita o ítem (b), considerando o intervalo $[3/4, 9/4]$.

5.1R Analise cada uma das funções definidas abaixo com relação à existência de máximos e mínimos locais e absolutos.

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$ (b) $f(x) = xe^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = 3\cos(2x), \quad x \in [0, \pi]$ (d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$

(e) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$ (f) $f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$

5.1S A função $f(x) = 2 - |1 - x|$, definida para $0 \leq x \leq 2$, admite algum ponto de máximo ou de mínimo?

5.1T Determine, se existirem, os pontos de mínimo e de máximo da função $y = 2xe^{2x}$. Analise, ainda, o gráfico dessa função quanto à concavidade.

5.1U Esboce o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo.

(a) $f(x) = x^3 - 3x$ (b) $f(x) = x^4 - 2x^2$ (c) $f(x) = x^4 - x^3$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ (f) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ (g) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$ (h) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-3}$

(i) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-9}$ (j) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$ (k) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ (l) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$

(m) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ (n) $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ (o) $f(x) = xe^{-x}$ (p) $f(x) = e^{-x^2}$

5.1V A figura ao lado mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$.

(a) Para quais valores de x, f é crescente? E decrescente?

(b) Essa função possui pontos de máximo e de mínimo?

(c) Essa função possui ponto de inflexão?

(d) O que representa, no gráfico, a reta $y = 4$?

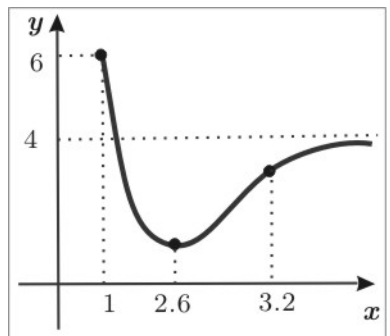


Fig. 5.1

5.1W Suponha que a figura ao lado corresponda ao gráfico da derivada f' de uma função $y = f(x)$.

(a) Qual a inclinação da tangente ao gráfico de f em $x = 1$?

(b) Com relação ao crescimento e à concavidade, descreva o gráfico de f no intervalo $[1, 2]$.

(c) O gráfico de f possui alguma tangente horizontal?

(d) A função f possui algum ponto de máximo ou de mínimo local?

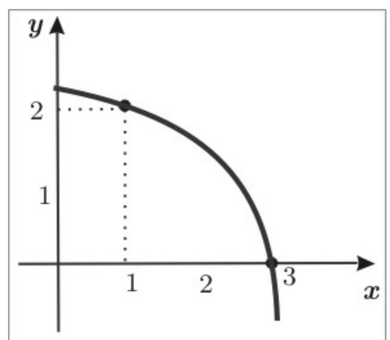


Fig. 5.1

5.1X Existe algum valor para m, de modo que a função $f(x) = mx - m^2 \ln\left(1 + x^2\right)$ tenha $x = 2$ como ponto de mínimo local?

5.1Y Se $a^2 < 3b$, deduza que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ não possui máximo nem mínimo.

5.2 Problemas de Máximo e Mínimo

5.2A Determine dois números positivos x e y com produto p e cuja soma seja a menor possível.

5.2B Determine as dimensões de uma caixa retangular de base quadrada, sem tampa, de forma que sua área total tenha um valor prefixado A e seu volume V seja o maior possível.

5.2C Demonstre que o retângulo de área máxima inscrito em um círculo de raio r é um quadrado.

5.2D De todos os triângulos isóceles de igual perímetro, o que tem maior área é o triângulo eqüilátero.

5.2E Dois corretores, de larguras a e b, encontram-se num ângulo reto, como indica a figura ao lado. Seja l o comprimento máximo de uma viga que pode passar horizontalmente de um corredor ao outro. Determine l em termos de a e b.

5.2F Encontre sobre a curva $y^2 - x^2 = 1$, o ponto mais próximo do ponto $(-1, 0)$.

5.2G Qual o número real positivo cuja diferença entre ele e seu quadrado resulta no maior valor possível?

5.2H Qual ponto da parábola $y = 1 - x^2$ está mais próximo da origem? (*sug.*: esse problema consiste em minimizar a função $f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + (1 - x^2)^2$, que representa o quadrado da distância de um ponto da parábola à origem).

5.2I Qual ponto da parábola $y = x^2$ está mais próximo da reta $y = x - 2$? (*sug.*: minimize o quadrado da distância de um ponto a uma reta!).

5.2J Dentre todos os retângulos com o mesmo perímetro p, mostre que o quadrado é o de maior área. (*sug.*: o problema consiste em maximizar a função área $A(x) = xy$, sendo $2x + 2y = p$).

5.2K Ache a equação da reta que passa no ponto $(3,2)$ e, no primeiro quadrante, forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima (figura 5.3). Proceda assim:

(a) Admita a reta na forma $y = ax+b$ e note que $3a+b = 2$;

(b) A função a ser minimizada é a função área: $A = \dfrac{x_0 y_0}{2}$

(c) Determine x_0 e y_0 e, em seguida, a equação da reta.

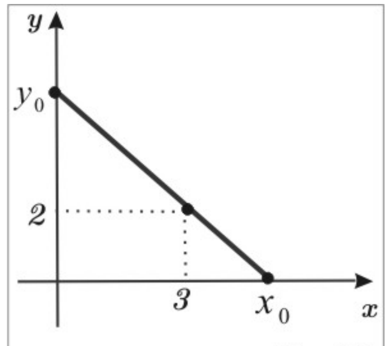


Fig. 5.3

5.2L Encontre os comprimentos dos lados do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r, estando a base do retângulo sobre o diâmetro do semicírculo. (*sug.*: a função a ser maximizada é a área e esta vem dada por:

$$A = xy = x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

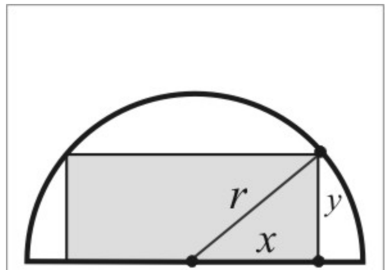


Fig. 5.4

5.2M Uma indústria de embalagens de metal onde você trabalha é escolhida para fornecer latinhas de cerveja de $500ml$ para um fabricante multinacional. O gerente da fábrica descobre que você é um funcionário que já estudou cálculo e, por essa razão, lhe procura e pergunta: as dimensões da lata (*altura* e *raio*) podem influir no custo da produção? (*sug.*: lembre-se das fórmulas básicas da área total e volume do cilindro de raio x e altura y: $A_T = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ e $V = \pi x^2 y = 500$).

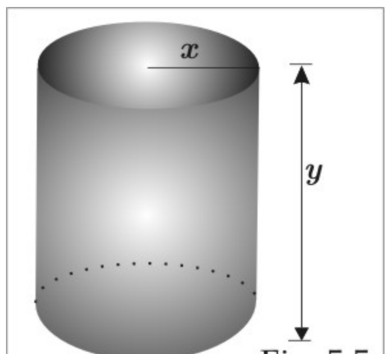


Fig. 5.5

5.2N Uma indústria produz determinado artigo e vende-o com um lucro mensal dadao pela expressão $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, onde q representa a quantidade produzida mensalmente.

Qual a produção que maximiza o lucro? Qual é esse lucro máximo?

5.2O Duas torres têm, respectivamente, 50 e 30 metros de altura, estando separadas por uma distância de 150 metros e um cabo guia deve ser estendido do ponto A até o topo de cada torre. (veja figura 5.6).

(a) Localize exatamente o ponto A de modo que o comprimento total do cabo seja mínimo.

(b) Mostre que o comprimento do cabo usado é mínimo sempre que os ângulos em A são iguais, independente da altura das torres.

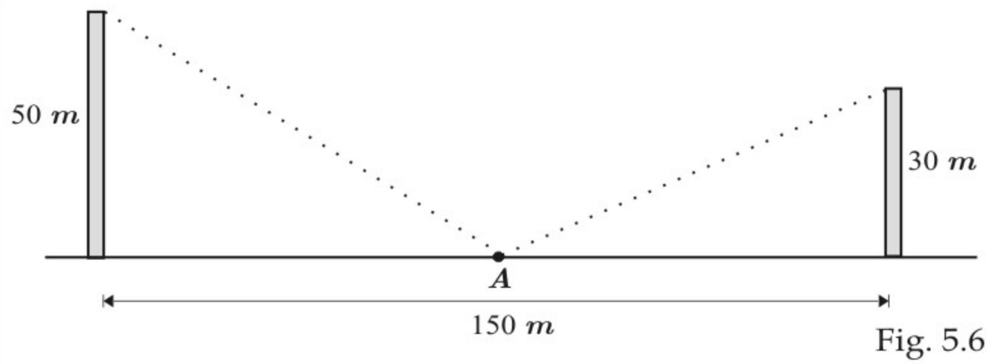


Fig. 5.6

5.2P Uma área retangular em uma fazenda será cercada por um rio e nos outros três lados por uma cerca elétrica feita de um fio. Com $800m$ de fio à disposição, qual é a maior área que se pode cercar e quais são suas dimensões?

5.2Q Uma folha com perímetro de $36m$ será enrolada para formar um cilindro, como é mostrado na figura ao lado. Que valores de x e y fornecem o maior volume?
A mesma folha sofrerá uma revolução em torno de seu lado y gerando um outro cilindro. Que valores de x e y fornecem, agora, o maior volume?

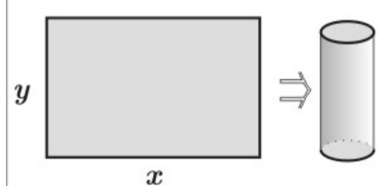


Fig. 5.7

5.2R Determine o raio r e a altura h do maior cilindro circular reto que pode ser colocado dentro de uma esfera de raio $\sqrt{3}$, como sugere a figura 5.8 ao lado. (recorde-se que o volume da esfera e do cilindro sã o dados, respectimaente por:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e} \quad V_C = \pi r^2 h).$$

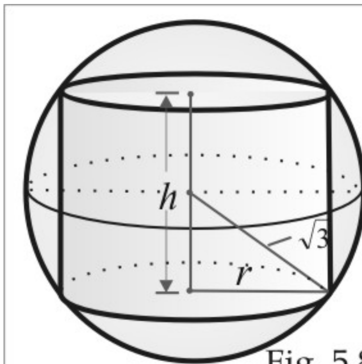


Fig. 5.8

5.2S Se o perímetro do setor circular apresentado na figura 5.9 ao lado for fixado em $100m$, que valores de r e s darão ao setor a maior área?

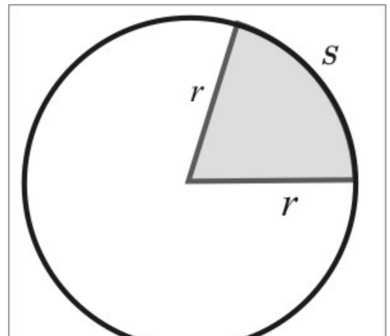


Fig. 5.9

Assíntotas

Se a distância entre o gráfico de uma função e uma reta fixa se aproxima de zero à medida que a curva se afasta da origem, dizemos que a curva se aproxima *assintóticamente* da reta ou que a reta é uma *assíntota* do gráfico.

Assíntotas horizontais, verticais e oblíquas

- A reta $y = b$ é uma *assíntota horizontal* do gráfico da função $y = f(x)$ se:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

- A reta $x = a$ é uma *assíntota vertical* do gráfico da função $y = f(x)$ se:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

- A reta $y = ax + b$ é uma *assíntota oblíqua* do gráfico da função $y = f(x)$ se:

$$\lim_{|x|\to\infty} |f(x) - (ax+b)| = 0.$$

Por exemplo, a função $y = x + 1/x$ tem o eixo y como assíntota vertical e a reta $y = x$ como uma assíntota oblíqua. De fato: $\lim_{|x|\to\infty} |f(x) - x| = \lim_{|x|\to\infty} |1/x| = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

5.2T Verifique que o gráfico de cada uma das funções $y = f(x)$ definidas abaixo possui ao menos um tipo de assíntota.

(a) $y = x + \ln x$ (b) $y = \dfrac{1}{x^2}$ (c) $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ (d) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ (e) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

(f) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x+1}}$ (g) $y = \sqrt{x^2+1}$ (h) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (i) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ (j) $y = \dfrac{4-x^2}{x+1}$

5.3 A Regra de l'Hôpital

John Bernoulli descobriu uma regra para o cálculo de limites de frações cujos numeradores e denominadores tendem para zero. A regra é conhecida atualmente como **Regra de l'Hôpital**, em homenagem ao marquês de St. Mesme, *Guillaume François Antoine de l'Hôpital* (1661-1704), um nobre francês que escreveu o primeiro texto introdutório de cálculo diferencial, em que a regra foi impressa pela primeira vez.

Forma Indeterminada $0/0$

Se as funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$ são zero em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

não pode ser calculado com a substituição $x = a$. A substituição gera a expressão $0/0$, sem significado algum. Recorde-se dos argumentos que utilizamos em sala de aula para calcular $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x$, em que a substituição $x = 0$ produziu a forma indeterminada $0/0$. Por outro lado, fomos bem sucedidos com o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

com o qual calculamos a derivada $f'(a)$ e que sempre resulta na forma $0/0$ com a substituição $x = a$. A Regra de l'Hôpital nos permite usar derivadas para calcular llimites que, abordados de outra forma, conduzem à formas indeterminadas.

Teorema (*Regra de l'Hôpital*) Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que f e g sejam deriváveis em um intervalo aberto contendo a e que $g'(x) \neq 0$ nesse intervalo exceto, possivelmente, em $x = a$. Então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{5.3}$$

desde que exista o limite do lado direito de (5.3).

Atenção

Ao aplicar a Regra de l'Hôpital não caia na armadilha de usar a derivada de f/g. O quociente a ser usado é f'/g' e não $(f/g)'$.

Exemplo *Aplicando a Regra de l'Hôpital*

A expressão $\dfrac{1 - cosx}{x + x^2}$ com $x = 0$ produz a indeterminação $0/0$ e aplicando a regra (5.3), encontramos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{senx}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0$$

Formas indeterminadas $\infty/\infty,\ \infty\cdot 0,\ \infty-\infty$

Uma versão da Regra de l'Hôpital também se aplica a quocientes que produzem as formas indeterminadas $\infty/\infty,\ \infty\cdot 0,\ \infty-\infty$. Por exemplo, se $f(x)$ e $g(x)$ tendem ao infinito quando $x\to a$, então a fórmula (5.3) continua válida, desde que o limite do lado direito exista. Aqui, como também na forma indeterminada $0/0$, o *ponto* a onde investigamos o limite pode ser finito ou $\pm\infty$.

Exemplo Calcule

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

Solução

(a) Note que o numerador e o denominador são descontínuos em $x=\pi/2$, então investigaremos os limites laterais nesse ponto. Temos:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}=\boxed{\frac{\infty}{\infty}}=(\text{l'Hôpital})=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x\operatorname{tg} x}{\sec^2 x}=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\operatorname{sen} x=1.$$

O limite lateral à direita também é 1, e a forma indeterminada nesse caso é $\dfrac{-\infty}{-\infty}$. Logo, o limite é 1.

(b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}=\boxed{\frac{\infty}{\infty}}=(\text{l'Hôpital})=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

Exemplo Trabalhando com as Formas Indeterminadas $\infty\cdot 0$ e $\infty-\infty$

Calcule

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)$

Solução

(a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)=\boxed{\infty\cdot 0}=(\text{fazer } t=1/x)=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\operatorname{sen} t\right)=1.$$

(b) Se $x\to 0^+$, então $\operatorname{sen} x\to 0^+$ e, portanto, $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x}\to\infty-\infty$. De maneira similar, se $x\to 0^-$, então $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x}\to-\infty+\infty$. Nenhuma das duas formas revela o que acontece com o limite. A saída é combinarmos as frações:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}$$

e, então, aplicamos a Regra de l'Hôpital ao resultado:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}=\boxed{\tfrac{0}{0}}=(\text{l'Hôpital})=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x+x\cos x}=\boxed{\tfrac{0}{0}}=(\text{l'Hôpital})=\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x-x\operatorname{sen} x}=\frac{0}{2}=0.\end{aligned}$$

Formas Indeterminadas 1^∞, 0^0 e ∞^0

Os limites que produzem essas formas indeterminadas podem, às vezes, ser tratados utilizando-se logarítmos. De fato, da relação $f(x)=\exp[\ln f(x)]$ deduzimos que:

$$\lim_{x\to a}\ln[f(x)]=L \Longrightarrow \lim_{x\to a}\exp[\ln f(x)]=\exp\left[\lim_{x\to a}\ln f(x)\right]=e^L. \tag{5.4}$$

Em (5.4) o *ponto* a pode ser finito ou $\pm\infty$.

Exemplo Calcule

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

Solução

(a) Trata-se de uma indeterminação do tipo 1^∞, a qual será convertida em $0/0$ por aplicação do logarítimo. Considerando $f(x)=(1+1/x)^x$, temos:

$$\ln f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\Longrightarrow f(x)=\exp\left[\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\right]$$

e, portanto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\exp[\ln f(x)]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\right]=\exp(\boxed{\tfrac{0}{0}})=(\text{l'Hôpital})=\\ &= \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x}\right]=e^1=e.\end{aligned}$$

(b) Trata-se de uma indeterminação do tipo 0^0 e procederemos como no ítem (a). Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^x &= \boxed{0^0}=\lim_{x\to 0^+}\exp[\ln x^x]=\exp\left[\lim_{x\to 0^+} x\ln x\right]=\exp\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\right]=\exp(\boxed{\tfrac{-\infty}{\infty}})=\\ &= (\text{l'Hôpital})=\exp\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}\right]=\exp\left[\lim_{x\to 0^+}(-x)\right]=e^0=1.\end{aligned}$$

(c) Temos agora uma indeterminação do tipo ∞^0 e procederemos como no ítem (a). Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^{1/x} &= \boxed{\infty^0} = \lim_{x\to\infty} \exp\left[\ln x^{1/x}\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right] = \exp(\boxed{\tfrac{\infty}{\infty}}) = \\ &= (\text{l'Hôpital}) = \exp\left[\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1}\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right] = e^0 = 1.\end{aligned}$$

Escrevendo para aprender *Demonstrando a Regra de l'Hôpital*

Vamos demonstrar a Regra de l'Hôpital (5.3), no caso em que o limite é finito, isto é, quando a for um número real. A demonstração é na verdade uma aplicação do *Teorema do Valor Médio de Cauchy*, que é uma versão um pouquinho mais geral do Teorema do Valor Médio apresentado em sala de aula.

Teorema do Valor Médio de Cauchy

Suponha que as funções f e g sejam contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e deriváveis no intervalo aberto (a, b) e suponha, ainda, que $g'(x) \neq 0$ em qualquer x do intervalo (a, b). Então existe um número c em (a, b) tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5.5}$$

Prova do TVM de Cauchy

Daremos o roteiro e deixaremos os detalhes da demonstração para você preencher. Não deixe de fazê-lo.

(i) Aplique o Teorema de Rolle para a função g em $[a, b]$ e deduza que $g(b) \neq g(a)$; essa condição é necessária em (5.5).

(ii) Aplique o Teorema de Rolle à função

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

para deduzir que existe c em (a, b) tal que $F'(c) = 0$ e a partir dessa igualdade obtenha (5.5) $\square$

Prova da Regra de l'Hôpital

Comece revendo as condições exigidas na regra. Suponha que x esteja à direita de a e aplique o TVM de Cauchy ao intervalo $[a, x]$. Existe c entre a e x tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{(lembre-se que } f(a) = g(a) = 0).$$

Logo,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Conforme x tende para a, o número c também se aproxima de a, porque está entre x e a. Conseqüentemente, tomando o limite na última igualdade, com $x \to a^+$, obtemos:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{5.6}$$

que estabelece a Regra de l'Hôpital. O caso em que x está à esquerda de a o TVM de Cauchy é aplicado ao intervalo $[x, a]$ e o limite obtido é o limite lateral à esquerda. $\square$

5.3A Calcule os limites indicados.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{x^2-1}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{cotg} x$

(i) $\displaystyle\lim_{y\to\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - y\right)\operatorname{tg} y$ (j) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1+t)}{\log_2 t}$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (x+e^x)^{1/x}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(\pi/2 - \operatorname{arctg} x)$

5.3B A Regra de l'Hôpital não ajuda a encontrar os limites apresentados abaixo. Tente; você voltará sempre ao mesmo ponto. Calclule os limites de outra maneira.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x}{\operatorname{tg} x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x}$

5.3C. Qual está correto e qual está errado? Justifique suas respostas.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2x} = \frac{1}{6}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \frac{0}{6} = 0$

5.3D Dê exemplo de duas funções deriváveis f e g com $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ que satisfaçam as condições a seguir.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

5.3E Considere as funções

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ mas $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2.$

(b) Explique porque isso não contradiz a Regra de l'Hôpital.

Curiosidade *Por que* 0^{∞} *e* $0^{-\infty}$ *não são formas indeterminadas.*

Presuma que uma função $f(x)$ não é negativa em um intervalo aberto contendo c e que $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.
(a) Se $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = 0$ e (b) Se $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \infty$.
De fato: primeiro, recorde-se que $\exp(+\infty) = +\infty$ e $\exp(-\infty) = 0$ e, depois, que $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \exp\left[\lim_{x\to c} g(x)\ln f(x)\right] = \exp[(\pm\infty)\cdot(-\infty)] = \exp(\mp\infty)$.

Respostas e Sugestões

5.1A $c = 2\sqrt{2}$ **5.1B** Não há contradição porque f não é derivável em $]0,3[$ **5.1C** Não há contradição porque f não é derivável em $]-1,1[$ **5.1J** $f(x) = x^4 - 4x + 5$ **5.1K** (a) $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ são, respectivamente, pontos de máximo e de mínimo locais. A função não tem extremos absolutos porque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (b) $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ são pontos de máximos absolutos, nos quais f atinge o valor 3; $x_3 = 2$ é ponto de mínimo local com $f(2) = -1$; $x_4 = -2$ é ponto de mínimo absoluto com $f(-2) = -17$.

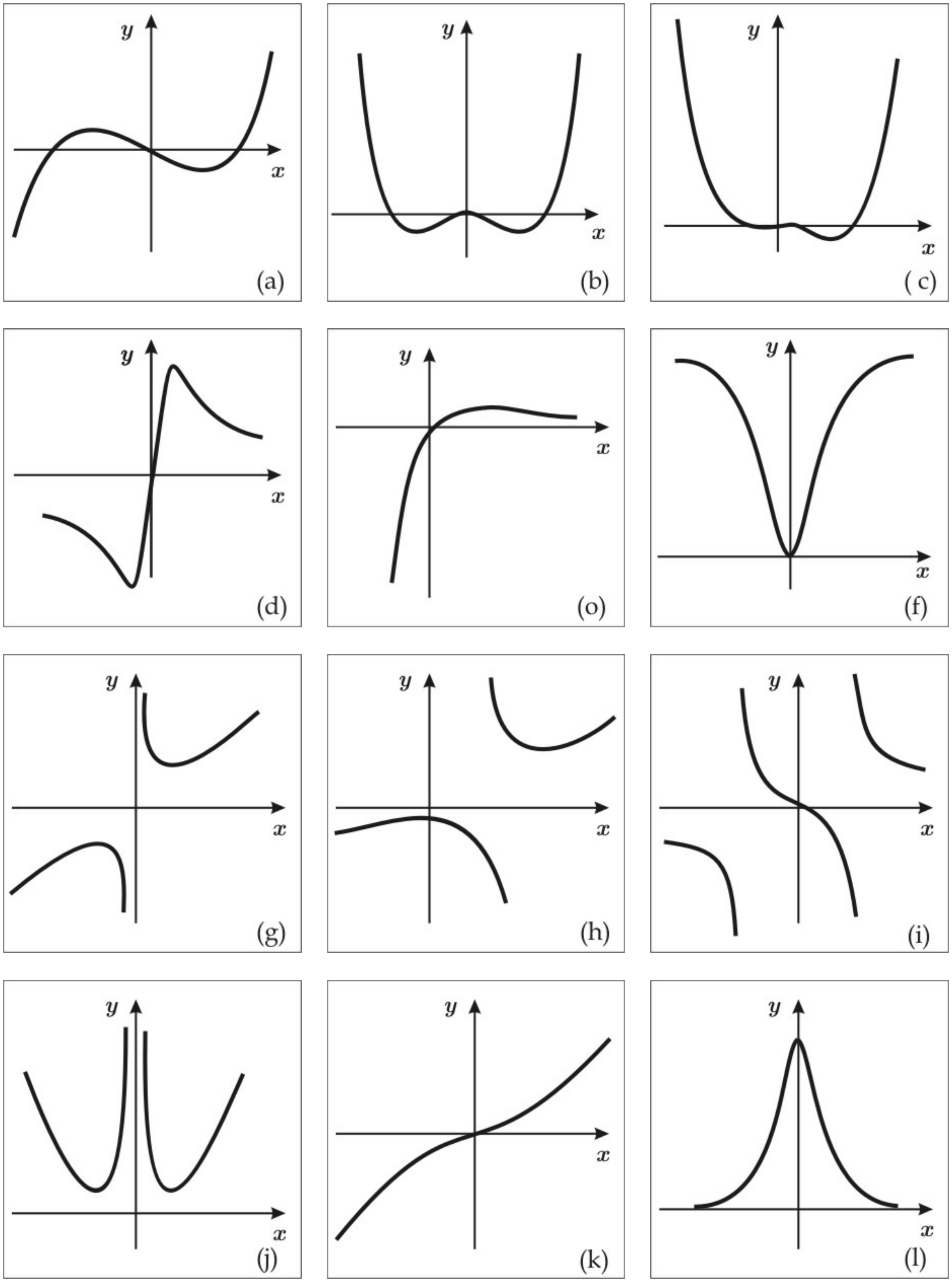
Dica: *Uma maneira eficiente de comprovar que uma dada função $f(x)$ não tem máximo e/ou mínimo absoluto é mostrar que* $\lim f(x) = +\infty$ *e/ou.* $\lim f(x) = -\infty$.

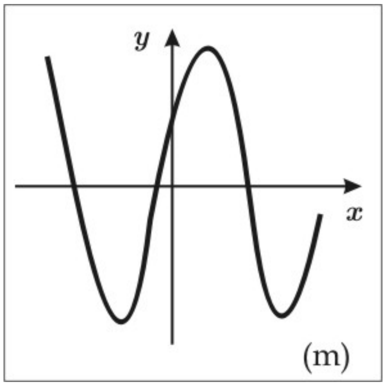
5.1L x_M e x_m representam, respectivamente, os pontos de máximos absolutos e mínimos absolutos.

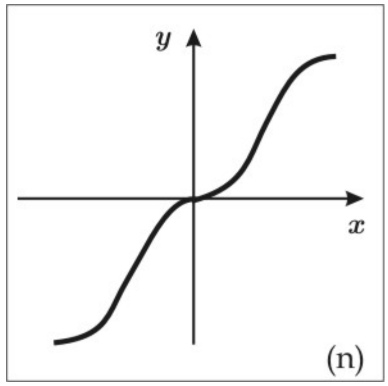
	Max Loc	Max Abs	Min Loc	Min Abs	$\varphi(x_M)$ e $\varphi(x_m)$
(a)	$x_1 = 1$	*não há*	$x_2 = 2$	*não há*	$\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \pm\infty$
(b)	$x_1 = 1$	$x_M = 3$	$x_2 = 2$	$x_m = 0$	$\varphi(x_M) = 12$; $\varphi(x_m) = 3$
(c)	$x_1 = 1$	$x_M = 3$	*não há*	$x_m = 1/2$ e $x_m = 2$	$\varphi(x_M) = 12$; $\varphi(x_m) = 7$
(d)	*não há*	$x_M = 1$ e $x_M = 5/2$	*não há*	$x_m = 1/2$ e $x_m = 2$	$\varphi(x_M) = 8$; $\varphi(x_m) = 7$
(e)	$x_1 = 9/4$	$x_M = 1$	$x_2 = 3/4$	$x_m = 2$	$\varphi(x_M) = 8$; $\varphi(x_m) = 7$

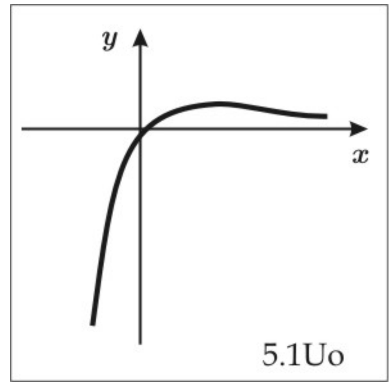
5.1M	Max Loc	Max Abs	Min Loc	Min Abs	$f(x_M)$ e $f(x_m)$
(a)	2π	$\pi/4$	0	$5\pi/4$	$f(x_M) = \sqrt{2}$; $f(x_m) = -\sqrt{2}$
(b)	1	1	não há	*não há*	$f(x_M) = 1/e$; $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$
(c)	não há	0 e π	*não há*	$\pi/2$	$f(x_M) = 3$; $f(x_m) = -3$
(d)	*não há*	0	*não há*	± 1	$f(x_M) = 18$; $f(x_m) = 0$
(e)	*não há*	*não há*	$1/\sqrt[3]{2}$	*não há*	
(f)	*não há*	$\pm\sqrt{2/3}$	*não há*	$-1,\ 0$ e 1	

5.1S Mín. Abs. $x_m = 1$ e $x_m = 2$; Máx. Abs. $x_M = 1$ **5.1T** $x = -1/2$ é ponto de mínimo local; a concavidade f é voltada para baixo no intervalo $(-\infty, -1)$ e voltada para cima em $(-1, +\infty)$ **5.1U** Antes de esboçar o gráfico não esqueça de determinar os pontos extremos , as regiões de crescimento ou decrescimento e as inflexões da função.


(a)
(b)
(c)
(d)
(o)
(f)
(g)
(h)
(i)
(j)
(k)
(l)







5.1V (a) f decresce em $1 \leq x \leq 2.6$ e cresce em $x > 2.6$; (b) Min. Abs. em $x_m = 2.6$ e Max. Abs. em $x_M = 1$; (c) $x = 3.2$ é um ponto de inflexão; (d) $y = 4$ é uma assíntota horizontal.

5.1W (a) 2; (b) Em $[1,2]$, f' positiva e decrescente. Logo, f é crescente e seu gráfico tem concavidade para baixo; (c) Sim, em $x = 3$; (d) $x = 3$ é máximo local, pois $f' < 0$, para $x > 3$, e $f' > 0$, para $x < 3$.

5.1X $m = 0$ ou $m = 5/4$ **5.2A** $\sqrt{p}$, $\sqrt{p}$ **5.2B** $b = \sqrt{A/3}$ e $h = b/2$

5.2E $l = [(a^2b)^{1/3} + b]\sqrt{1 + (a/b)^{2/3}}$ **5.3F** $(-1/2, \pm\sqrt{5}/2)$ **5.2G** $1/2$

5.2H $(\pm\sqrt{2}/2, 1/2)$ **5.34I** $(1/2, 1/4)$ **5.2K** $2x+3y = 12$ **5.2L** $r\sqrt{2}$ e $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ **5.2M** $x = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ e $y = 2r$

5.2N $q = 10$ e $L_{\max} = L(10)$ **5.2O** $x = 93.75$ e $y = 56.25$ **5.2P** $x = 200$ e $y = 400$

5.2Q $x = 12$ e $y = 6$ **52R** $h = 25$ e $r = \sqrt{2}$ **5.2S** $r = 25$ e $s = 50$

5.2T

(a) $-x = 0$ (b) $x = 0$; $y = 0$ (c) $x = \pm 2$; $y = 1$ (d) $y = x$ (e) $y = x$ e $x = 1$

(f) $x = -1$ (g) $y = \pm x$ (h) $y = 1$ (i) $x = \pm 1$; $y = \pm x$ (j) $y = 1 - x$ e $x = -1$

5.3A (a)1 (b) 0 (c) 1 (d) e (e) $1/e$ (f) 1 g) $+\infty$ (h) 0 (i) 1 (j) $\ln 2$ (k) e^2 (l) -1

5.3B (a)3 (b) 1 (c) 1 (d) 1

5.3C O ítem (a) está incorreto, porque a Regra de l'Hôpital não se aplica. O ítem (b) está correto; o limite é calculado com a substituição $x = 3$.

5.3D (a) $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = x^2$ (b) $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = x$ (c) $f(x) = 3x$ e $g(x) = x^2$

5.3E (a) Para $x \neq 0$, temos que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+2}{x+1},$$

e portanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x+1} = 2.$$

(b) Esse exemplo não contradiz a Regra de l'Hõpital porque as funções envolvidas não são deriváveis em $x = 0$ e, portanto, a regra não se aplica.