

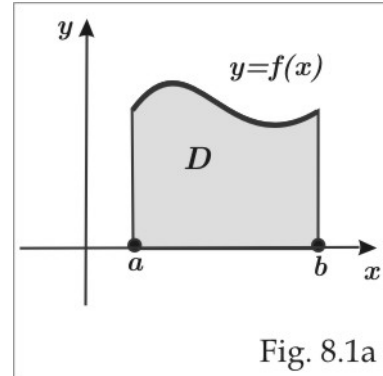
8. Aplicações da Integral



8.1 Áreas Planas

Suponha que uma certa região D do plano xy seja delimitada pelo eixo x , pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelo gráfico de uma função contínua e não negativa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, como mostra a figura B1(a). A área da região D é denotada por $A(D)$ e calculada com auxílio da fórmula:

$$A(D) = \int_a^b f(x) dx.$$



8.1A Calcule a área de um círculo de raio R e da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (resp. πR^2 e πab)

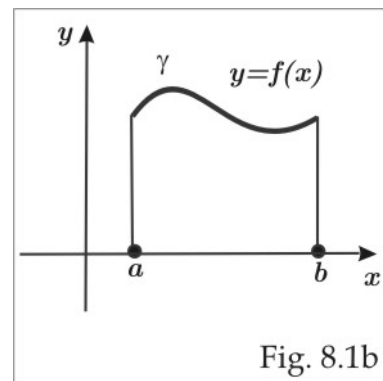
8.1B Calcule a área da região delimitada pelo eixo x , pelas retas $x = \pm B$, $B > 0$, e pelo gráfico da função $y = x^2 \exp(-|x^3|)$. Esta área tem um limite com $B \rightarrow \infty$? (resp. $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-B^3}$; área limite $2/3$)

8.1C Considere $B > 2$ e calcule a área sob a curva $y = [x(\ln x)^2]^{-1}$, entre as retas $x = 2$ e $x = B$. Esta área tem um limite com $B \rightarrow \infty$? (resp. $1/\ln 2 - 1/\ln B$); área limite $1/\ln 2$)

8.2 Comprimento de Curvas

Forma Cartesiana. Considere uma curva γ no plano xy , que é representada pelo gráfico de uma função $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, contínua com derivada primeira também contínua no intervalo $[a, b]$ (uma tal função é dita ser de classe C^1). O comprimento $L(\gamma)$ da curva γ é calculado pela integral:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$



8.2A Calcule o comprimento de uma circunferência de raio R . (resp. $2\pi R$)

8.2B As curvas abaixo são dadas na forma cartesiana. Em cada caso calcule o comprimento

do arco indicado (respostas na página 28)

$$(a) y = x^2 + 2x - 1, 0 \leq x \leq 1$$

$$(b) y = e^x, 0 \leq x \leq 1$$

$$(c) y = 1 - \ln(\operatorname{sen} x), \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$(d) y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 2$$

$$(e) y = \frac{2}{3} (1 + x^2)^{3/2}, 0 \leq x \leq 3$$

$$(f) x = \frac{y^3}{2} + \frac{1}{6y}, 1 \leq y \leq 3$$

$$(g) y = \sqrt{x}(1 - x/3), 0 \leq x \leq 3$$

$$(h) 8x^2 = 27y^3, 1 \leq x \leq 8$$

$$(i) y = x^{3/2}, 1 \leq x \leq 3$$

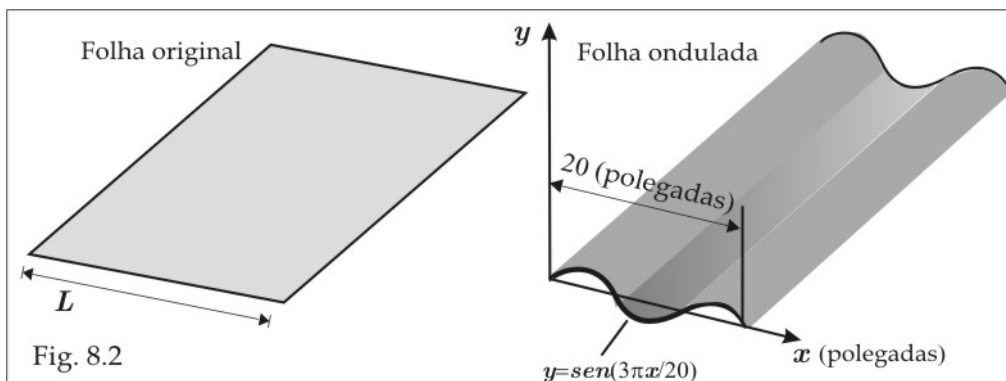
$$(j) y + \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{3} = 0, 2 \leq x \leq 3$$

$$(k) (y + 1)^2 = (x - 4)^3, 5 \leq x \leq 8$$

$$(l) y = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{3}x^{3/2}, 0 \leq x \leq 1$$

Aplicação: Fabricando Folhas Metálicas

Uma fábrica produz, a partir de folhas planas, folhas metálicas onduladas como as mostradas na Figura 8.2 abaixo.



As seções transversais dessas folhas têm o formato da curva

$$y = \operatorname{sen}(3\pi x/20), 0 \leq x \leq 20 \text{ polegadas}$$

e as folhas devem ser moduladas por um processo que não estique o material. Qual deve ser a largura L da folha original? De acordo com a fórmula do comprimento, deduzimos que a folha original deve medir

$$L = \int_0^{20} \sqrt{1 + a^2 \cos^2 ax} dx, \quad \text{sendo } a = 3\pi/20.$$

O valor numérico dessa integral será determinado usando a aproximação: $\sqrt{1 + \theta} \simeq 1 + \frac{1}{2}\theta$, com

$\theta = a^2 \cos^2 ax$. Temos, portanto:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{20} \sqrt{1 + a^2 \cos^2 ax} dx \simeq \int_0^{20} \left(1 + \frac{1}{2} a^2 \cos^2 ax \right) dx = \\ &= 20 + \frac{1}{2} a^2 \int_0^{20} \cos^2 ax dx = 20 + \frac{1}{4} a^2 \left[x + \frac{\text{sen } 2ax}{2} \right]_{x=0}^{x=20} \simeq 21.09 \text{ polegadas.} \end{aligned}$$

Um valor mais preciso poderia ser obtido com a aproximação: $\sqrt{1 + \theta} \simeq 1 + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\theta^2$.

Forma Paramétrica. Nesse caso a curva c é descrita por um par de equações: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, onde as funções $x(t)$ e $y(t)$ são de classe C^1 no intervalo $[a, b]$. O comprimento $L(\gamma)$ da curva γ é calculado agora pela integral:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

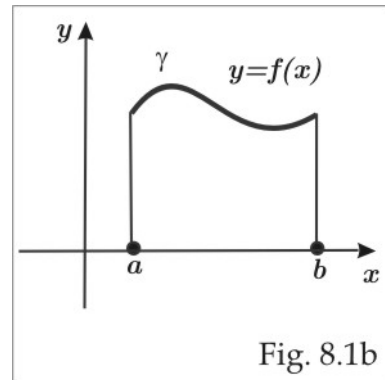


Fig. 8.1b

8.2C. Considere uma circunferência de raio R na forma parametrizada e calcule seu comprimento utilizando a fórmula acima. (resp. $2\pi R$)

8.2D Parametrizando a Elipse. Observando a figura ao lado, nota-se que as coordenadas do ponto $P(x, y)$ da elipse são: $x = OC$ e $y = DB$. Se t representa o ângulo entre o eixo x e o eixo OA , obtenha a seguinte parametrização para a elipse do Exercício 8.1A:

$$x = a \cos(t), y = b \text{sen}(t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

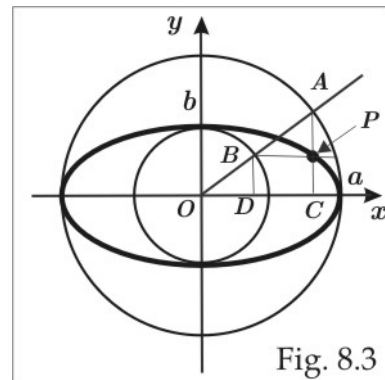


Fig. 8.3

B8. Parametrizando a Hipérbole. Observando a Figura B4, deduza que a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$x = a \sec(t), y = b \text{stg}(t), 0 \leq t \leq 2\pi,$$

onde t representa o ângulo entre o eixo x e o eixo OC .

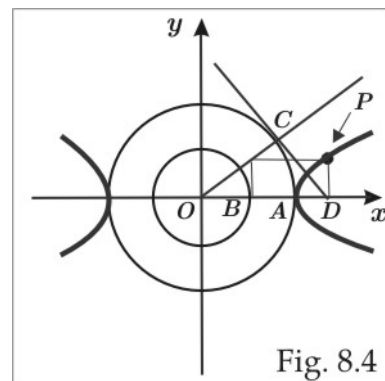


Fig. 8.4

8.2F Calcule o comprimento da *hipociclóide* de equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. (resp. $6a$)

8.2G Calcule a distância percorrida por uma partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$, se sua posição $P(x, y)$ no instante t vem dada por: $x = \frac{1}{2}t^2$ e $y = \frac{1}{3}(2t + 1)^{3/2}$. (resp.12)

8.2H Em cada caso abaixo, calcule o comprimento do arco indicado:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2, -1 \leq t \leq 3 \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t, 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ \text{(c)} \begin{cases} x = 2(1 - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t), 0 \leq t \leq \pi \end{cases} & \text{(d)} \begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t, 0 \leq t \leq \pi/4 \end{cases} \\ \text{(e)} \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t, 0 \leq t \leq \pi \end{cases} & \text{(a)} \begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 + t \\ y = \frac{1}{2}t^2 - t, 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{array}$$

8.2I Considere a curva c na forma paramétrica descrita por: $x = t^3 - 3t$, $y = t^3 - 5t - 1$, $t \in \mathbb{R}$. Determine a reta tangente à curva c no ponto correspondente a $t = 2$. Em que pontos a reta tangente é: (a) vertical e (b) horizontal? (resp. $9y - 7x + 41 = 0$; a reta tangente será vertical nos pontos correspondentes a $t = \pm 1$ e horizontal nos pontos correspondentes a $t = \pm\sqrt{5/3}$)

8.3 Coordenadas Polares

8.3A Localize no plano cartesiano os seguintes pontos dados em coordenadas polares e, em seguida, determine suas coordenadas cartesianas:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} (2, \pi/4) & \text{(b)} (2, 3\pi/2) & \text{(c)} (3, \pi/6) & \text{(d)} (1, -\pi/4) \\ \text{(e)} (2, 5\pi/6) & \text{(f)} (-1, -\pi/4) & \text{(g)} (-2, 7\pi/6) & \text{(h)} (-3, 13\pi/6) \end{array}$$

8.3B Determine as coordenadas polares dos pontos cujas coordenadas cartesianas são:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} (1/2, 1/2) & \text{(b)} (\pi/2, \pi/2) & \text{(c)} (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) & \text{(d)} (3, 3\sqrt{3}) \\ \text{(e)} (-1, -1) & \text{(f)} (1, \sqrt{3}) & \text{(g)} (-\sqrt{7}, 3) & \text{(h)} (0, -4) \end{array}$$

8.3C Passe para a forma polar $r = f(\theta)$ as curvas abaixo:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} xy = 2 & \text{(b)} x^2 + y^2 - 3y = 0 & \text{(c)} 3x^2 + 5y^2 = 15 \\ \text{(d)} x + 1 = 0 & \text{(e)} x^2 - y^2 = 1 & \text{(f)} y^2 - 4x = 0. \end{array}$$

8.3D Passe para forma cartesiana $F(x, y) = 0$ e esboce o gráfico de cada curva abaixo:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta \quad \text{(b) } r = \operatorname{sen} 2\theta \quad \text{(c) } r = \frac{4}{1 + \cos \theta} \quad \text{(d) } r = a \cos \theta \quad \text{(e) } r = 5 \\
 & \text{(f) } r = 5 + 2 \cos \theta \quad \text{(g) } r = 3 \sec \theta \quad \text{(h) } r = 1 + \sqrt{2} \cos \theta \quad \text{(i) } r = 2 \tan \theta \quad \text{(j) } r = \theta \\
 & \text{(k) } r^2 = \frac{2}{3} a^2 \cos \theta \quad \text{(l) } r = 1/\theta \quad \text{(m) } r = \frac{4}{1 - \cos \theta} \quad \text{(n) } r = 2 \operatorname{sen} \theta \quad \text{(o) } \theta = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

8.3E Sejam (r, θ) e (ρ, φ) as coordenadas polares dos pontos P e Q , respectivamente. Use a Lei dos co-senos e deduza que a distância entre P e Q pode ser calculada por:

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)}.$$

Use esse resultado e deduza que em coordenadas polares (r, θ) a equação de um círculo de raio R e centro no ponto (ρ, φ) é $r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) = R^2$.

8.3F Considere a curva de equação polar $r = \operatorname{sen} \theta + \cos \theta$, $-\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$. De duas maneiras identifique a curva como um arco de circunferência: primeiro passe a equação para coordenadas cartesianas; depois use o exercício precedente.

8.3G Deduza que as equações $\theta = \theta_0$, $r \cos \theta = \pm a$ e $r \operatorname{sen} \theta = \pm b$ representam retas e faça um esboço do gráfico em cada caso. De forma geral, se $N(\rho, \varphi)$ é o pé da perpendicular traçada do pólo a uma reta que não passa pelo pólo, então a equação dessa reta é:

$$r \cos(\theta - \varphi) = \rho \quad \text{ou} \quad r = \rho / (A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta), \quad \text{sendo } A = \cos \varphi \text{ e } b = \operatorname{sen} \varphi.$$

8.3H Determine, se existir, a interseção entre os seguintes pares de curvas:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } r = 2 \text{ e } r = 4 \cos \theta \quad \text{(b) } r = 1 + \cos \theta \text{ e } r = 1/3(1 - \cos \theta) \\
 & \text{(c) } r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta \text{ e } r = 2\sqrt{2} \cos \theta \quad \text{(d) } \theta = \pi/4 \text{ e } r = 2 \cos \theta
 \end{aligned}$$

8.4 Comprimento e Área (forma polar)

As curvas em coordenadas polares aqui consideradas são descritas por uma equação do tipo $r = f(\theta)$, sendo a função f e sua derivada primeira contínuas e o ângulo θ varia no intervalo $[\theta_1, \theta_2]$, como sugere a Figura 8.5 abaixo. Representa-se por L o comprimento do arco entre θ_1 e θ_2 e por $A(D)$ a área da região D correspondente. O comprimento L e a área $A(D)$ são calculados, respectivamente, pelas fórmulas: $L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta$ e $A(D) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta$

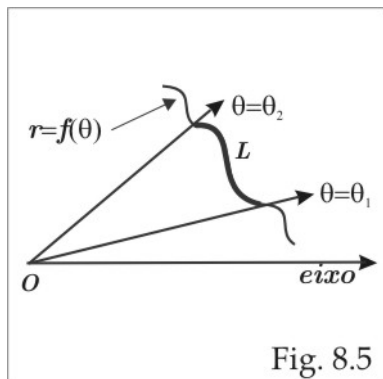


Fig. 8.5

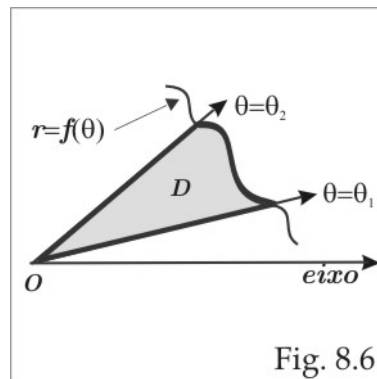


Fig. 8.6

8.4A Calcule o comprimento das seguintes curvas dadas na forma polar:

- (a) $r = 3 \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (b) $r = 2 \sec \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ (c) $r = 1 - \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
 (d) $r = \theta/3$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (e) $r = |\sin \theta|$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (f) $r = 3 \cos^2(\frac{\theta}{2})$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
 (g) $r = a\theta^2$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (h) $r = a \sin^3(\frac{\theta}{3})$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (i) $r = \sin \theta + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

8.4B Calcule a área da região interior a cada curva dada abaixo:

- (a) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (b) $r = a(2 - \cos \theta)$ (c) $r = 2a \sin \theta$
 (d) $r = a(1 + \cos 2\theta)$ (e) $r^2 = 1 - \cos \theta$ (f) $r^2 = 2a^2 \cos^2(\theta/2)$

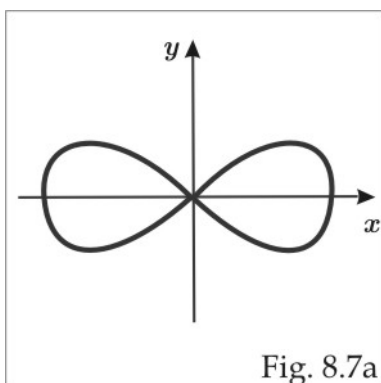
8.4C Em cada caso, esboce a região e calcule sua área.

- (a) região interior ao círculo $r = a$ e exterior à cardióide $r = a(1 - \cos \theta)$. (resp. $A = a^2(2 - \pi/4)$);
 (b) região delimitada pelas curvas $r = 2$, $\theta = \pi/4$ e $\theta = \pi/2$. (resp. $A = \pi/2$);
 (c) região interior à cardióide $r = a(1 + \sin \theta)$ e exterior ao círculo $r = a \sin \theta$. (resp. $A = 5\pi a^2/4$);
 (d) região comum aos círculos $r = 2a \cos \theta$ e $r = 2a \sin \theta$. (resp. $A = a^2(-1 + \pi/2)$);
 (e) região interior à lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ e exterior ao círculo $r = a$. (resp. $A = \frac{a^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$);
 (f) região interior ao círculo $r = 3a \cos \theta$ e exterior à cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$. (resp. $A = \pi a^2$);
 (g) região delimitada pela rosácea de 4 pétalas $r = a |\sin 2\theta|$ da Fig. 8.7b;
 (h) região interior ao círculo $r = \cos \theta$ e exterior à cardióide $r = 1 + \sin \theta$. (resp. $A = 1 + \pi/4$);
 (i) região interior ao círculo $r = \sin \theta$ e exterior à cardióide $r = 1 - \cos \theta$. (resp. $A = 1 + \pi/4$).

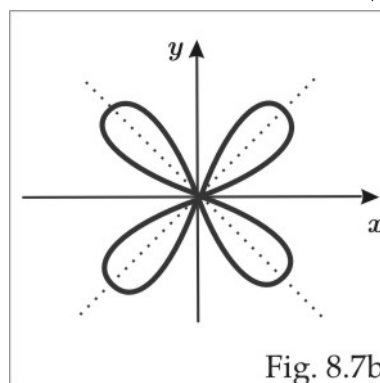
Algumas Curvas Especiais

As curvas em coordenadas polares que aparecem com mais frequência são apresentadas abaixo, com as respectivas equações. Acompanhe a figura com os valores de $\theta : 0, \pi/6, \pi/3, \pi, 3\pi/2,$ e 2π .

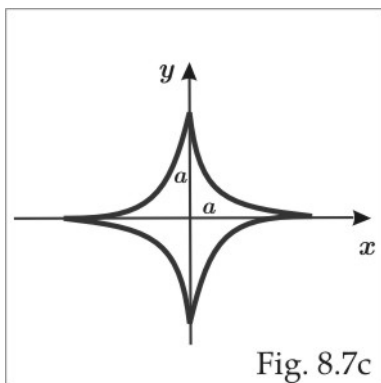
Leminiscata: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$



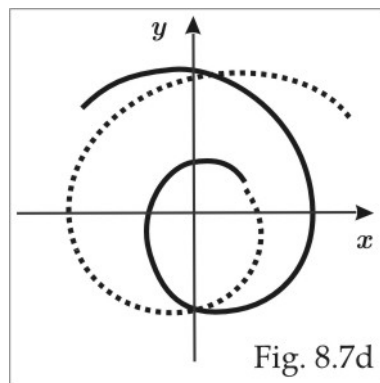
Rosácea de 4 pétalas: $r = a |\sin 2\theta|$



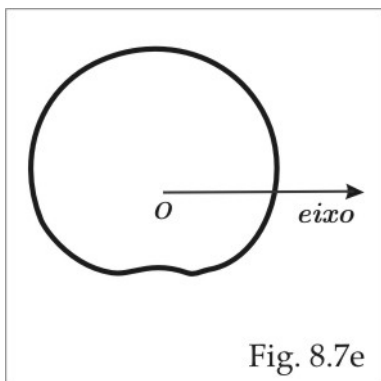
Hipociclóide: $x = a \cos^3 t; y = a \sin^3 t$



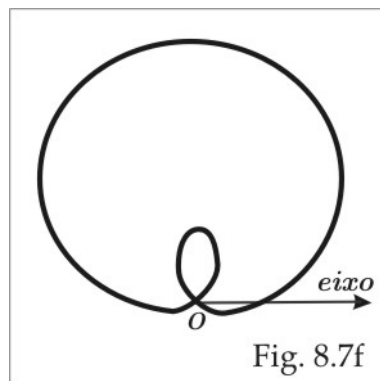
Espiral de Arquimedes: $r = a\theta$



Limaçon: $r = a + b \sin \theta, a < b$



Limaçon: $r = a + b \sin \theta, b < a$



Rosácea de 3 pétalas: $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$

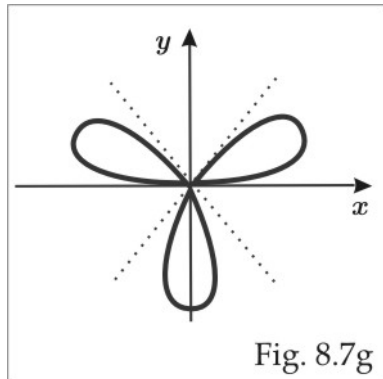


Fig. 8.7g

Limaçon: $r = 1 + 2 \cos \theta$

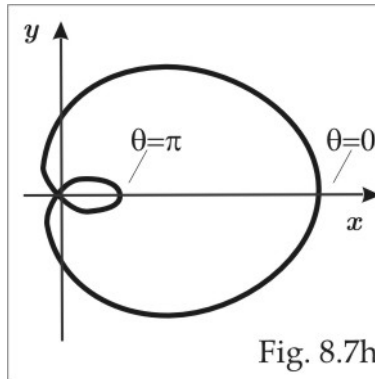


Fig. 8.7h

Cardióide I: $r = a(1 + \cos \theta)$

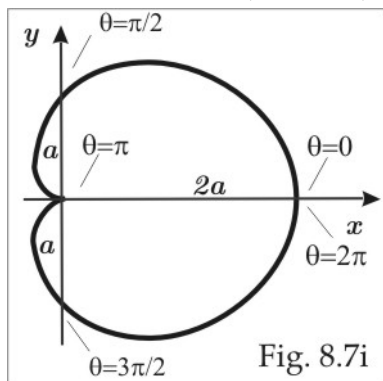


Fig. 8.7i

Cardióide II: $r = a(1 - \cos \theta)$

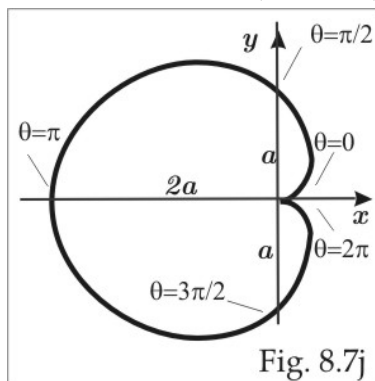


Fig. 8.7j

Cardióide III: $r = a(1 + \operatorname{sen} \theta)$

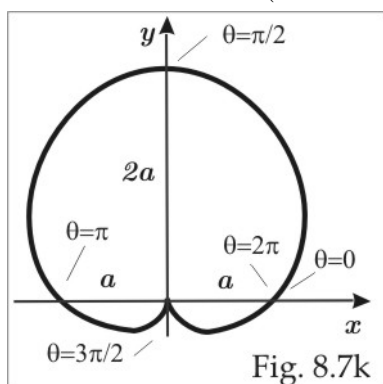


Fig. 8.7k

Cardióide IV: $r = a(1 - \operatorname{sen} \theta)$

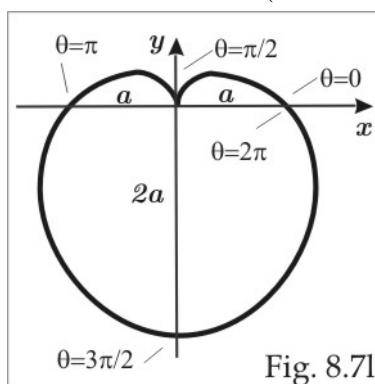


Fig. 8.7l

8.5 Sólidos de Revolução

Equação de uma superfície de revolução: Consideremos uma curva γ no plano xy descrita pela relação $F(x, y) = 0$, qui denominada *geratriz*, e denotemos por S a superfície obtida pela rotação

da curva γ em torno do eixo x . É claro que cada ponto da curva γ irá descrever uma circunferência de centro no ponto $C(x, 0, 0)$ e a superfície S é caracterizada por $\|\overrightarrow{CP}\| = \|\overrightarrow{CQ}\|$, onde P é um ponto genérico da superfície S e Q é o ponto de interseção da curva γ com o plano que passa por P , perpendicularmente ao eixo x (eixo de rotação), como sugere a figura abaixo. A equação cartesiana de S é, portanto:

$$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$$

No caso em que a curva é descrita pela equação $y = f(x)$ a equação cartesiana assume a forma

$$y^2 + z^2 = [f(x)]^2$$

8.5A Identifique a geratriz e o eixo de rotação da superfície de revolução cuja equação é:

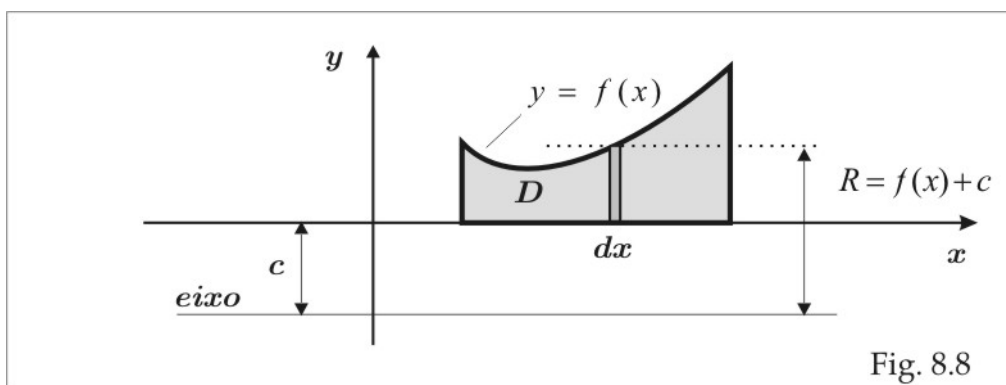
- (a) $z = x^2 + y^2$ (b) $x = y^2 + z^2$ (c) $y^2 = x^2 + z^2$
 (d) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (e) $x^2 + y^2 = 1$ (f) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$.

Superfície de Revolução: volume

Método das Fatias

Vamos estabelecer uma fórmula para o cálculo do volume do sólido Ω gerado pela rotação de uma região D do plano xy em torno do eixo horizontal $y = c$. Observando a Figura 8.8 abaixo, vemos que o *volume infinitesimal* dV , isto é, o volume da fatia de largura dx , vem dado por:

$$dV = \pi[f(x) + c]^2 dx - \pi c^2 dx.$$



O volume do sólido Ω é, portanto:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_a^b \pi (R^2 - c^2) dx$$

No caso em que o eixo de rotação é o eixo x , temos $c = 0$ e o volume do sólido é calculado pela fórmula:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

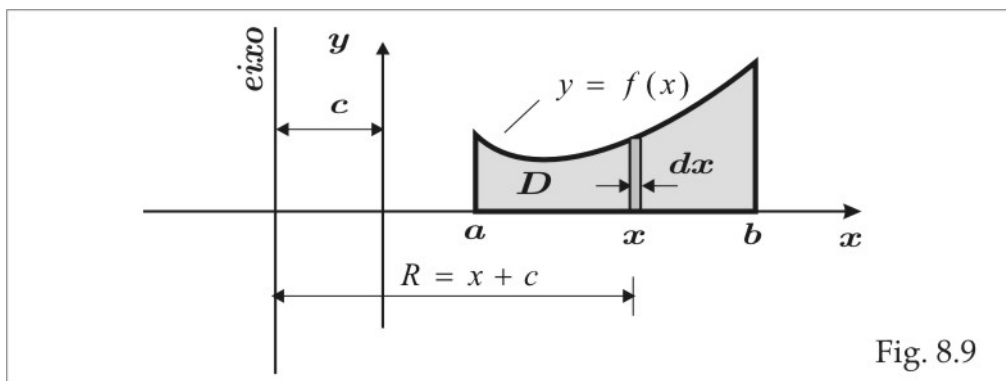
Método das Cascas Cilíndricas

Aqui o sólido Ω é gerado pela rotação da região D em torno do eixo (reta vertical) $x = c$. O volume infinitesimal dV , nesse caso é:

$$dV = \pi \left[(x + c + dx)^2 - (x + c)^2 \right] f(x) = 2\pi (x + c) f(x) dx$$

e o volume de Ω é a soma desses volumes infinitesimais, isto é:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_a^b 2\pi (x + c) f(x) dx$$



8.5B Em cada caso abaixo, esboce a região D delimitada pelas curvas dadas e em seguida calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região D em torno do eixo indicado.

- | | |
|---|---|
| (a) $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$, $x \geq 0$; eixo y | (b) $y = x^2 - 4x$, $y = 0$; eixo x |
| (c) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$; eixo $x = 4$ | (d) $x^2 + y^2 = 1$; eixo $x = 2$ |
| (e) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$; eixo $y = 2$ | (f) $y = x$, $y = 0$, $x = 2$; eixo y |
| (g) $y = x^2$, $y = 4 - x^2$; eixo x | (h) $xy = 1$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = 2$; eixo x . |

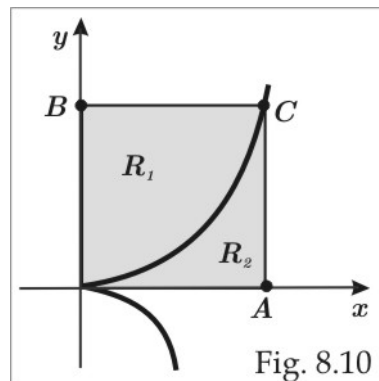
8.5C Uma região D do plano xy é delimitada pelo triângulo de vértices $(0,0)$, $(h,0)$ e (h,r) , sendo h e r números positivos. Calcule o volume do sólido resultante da rotação da região D em torno do eixo x (resp. $\pi r^2 h/3$). E se a rotação fosse em torno do eixo y ? (resp. $2\pi r h^2/3$)

8.5D Qual o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região do plano xy delimitada pela parábola $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $y = 2x - 1$ e $y = x + 2$? (resp. $13\pi/6$)

8.5E Considere a curva de equação $y^2 = x^3$ e as regiões R_1 e R_2 mostradas na Figura B15.

Determine o volume do sólido em cada situação a seguir:

- (a) R_2 gira em torno do eixo x ;
- (b) R_1 gira em torno do eixo y ;
- (c) R_2 gira em torno do eixo BC ;
- (d) R_1 gira em torno do eixo AC .



8.5F É feito um orifício de raio $2\sqrt{3}$ pelo centro de um sólido esférico de raio $R = 4$. Calcule o volume da porção retirada do sólido. (resp. $224\pi/3$)

8.5G Calcule o volume de um tronco de cone circular reto de altura h , raio da base inferior R e raio da base superior r . (resp.)

8.5H Calcule o volume de uma calota determinada em uma esfera de raio r por um plano cuja distância ao centro da esfera é h , $h < r$. (resp. $2\pi R^3/3 + \pi h^3/3 - \pi r^2 h$)

8.5I Calcule pelos dois métodos (Fatiamento e Cascas Cilíndricas) o volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo y da região delimitada pela curva $y = 2x - x^2$ e o eixo x .

8.5J Ao girar em torno do eixo y uma certa região do plano xy , obteve-se a seguinte expressão para o volume do sólido resultante:

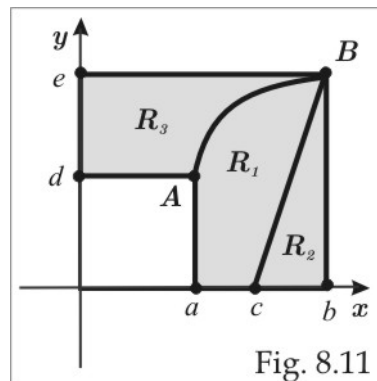
$$V = 2\pi \int_0^{\pi/4} (x \cos x - x \sin x) dx.$$

Identifique a região e calcule o volume V .

B42. A curva de A a B é descrita por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Identifique o sólido de revolução cujo volume é:

- (a) $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$ (b) $\int_c^d \pi f^{-1}(y)^2 dy$ (c) $\int_a^b \pi f(x)^2 dx - \frac{1}{2}\pi e^2(b-c)$
 (d) $\int_a^b 2\pi x f^{-1}(x) dx$ (e) $\int_a^b 2\pi f(x) dx$ (f) $\pi(be^2 - ad^2) - \int_a^b \pi f(x)^2 dx$.



8.5K Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelas retas $y = 0$, $x = 2$ e $x = 2y$, em torno da reta $y = x$ (sug. use uma rotação de eixos).

8.5L Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y do disco delimitado pela circunferência $(x - a)^2 + y^2 = b^2$, $0 < b < a$.

Sólidos Gerais

O Método das Fatias pode ser utilizado no cálculo do volume de um sólido qualquer, quando se conhece a área das seções transversais perpendiculares ao eixo x , por exemplo. De fato: suponhamos que um sólido Ω é limitado pelos planos $x = a$ e $x = b$ e que $A(x)$ representa a área da seção transversal no ponto x . O volume dV da fatia compreendida entre x e $x + dx$ é calculada por $dV = A(x) dx$, de modo que o volume do sólido Ω , que é a "soma" de todos esses volumes elementares, é calculado por:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_a^b A(x) dx$$

Utilize essa fórmula nos exercícios 8.5M a 8.5P.

8.5M A base de um sólido é o disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ e cada seção transversal do sólido determinada por planos perpendiculares ao eixo x é um quadrado cujo lado está sobre a base do sólido. Qual o volume do sólido?

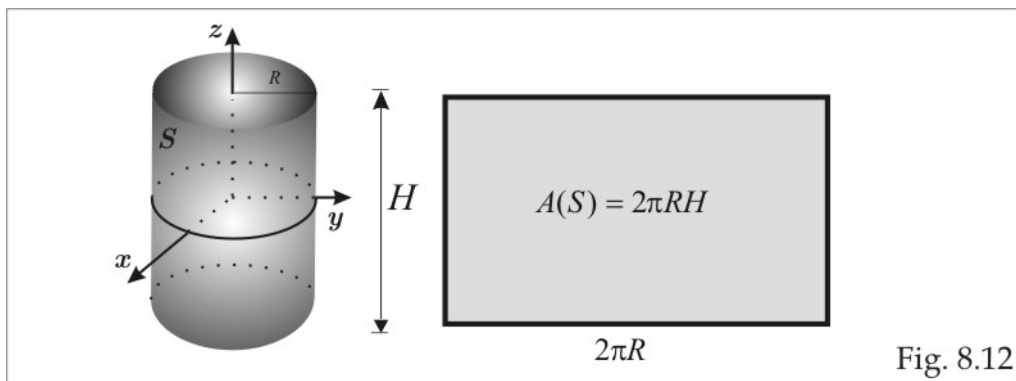
8.5N A base de um sólido é a região do plano xy limitada pelo eixo x e pela curva $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/2$. Toda seção plana do sólido perpendicular ao eixo x é um triângulo equilátero com um dos lados sobre a base do sólido. Calcule o volume do sólido.

8.5O De um cilindro circular reto de raio r corta-se uma *cunha* por meio de um plano passando por um diâmetro da base e formando um ângulo de 45° com o plano da base. Calcule o volume da cunha.

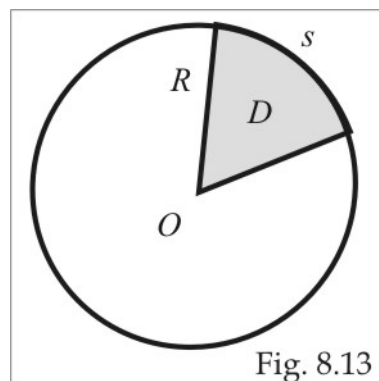
8.5P As seções transversais de um sólido por planos perpendiculares ao eixo x são círculos cujos diâmetros estão compreendidos entre as curvas $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$. Sabendo-se que o sólido se encontra entre os planos perpendiculares ao eixo x que passam pelos pontos de interseção dessas curvas, calcule seu volume.

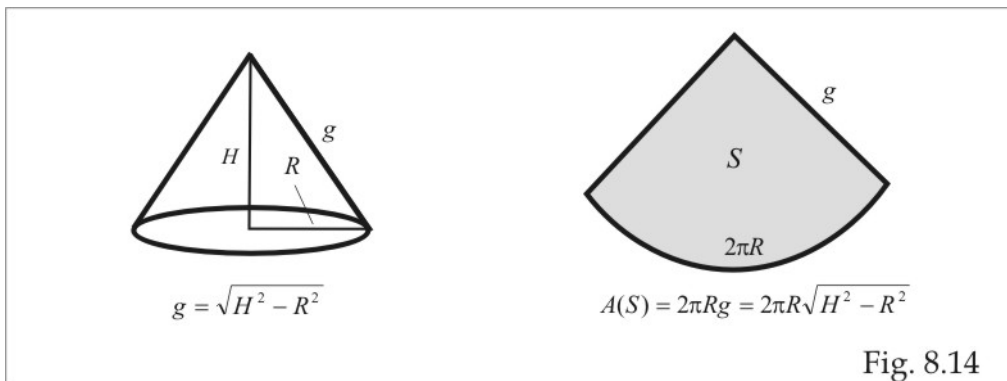
Superfície de Revolução: área

Antes de deduzir uma fórmula para a área de uma superfície de revolução, vamos calcular de maneira simples as áreas de duas superfícies bastante familiar: o cilindro e o cone circular reto. Para o cilindro de raio R e altura H , quando cortado e aberto, sua área lateral é calculada como se ele fosse um retângulo de altura H e base $2\pi R$, como sugere a Figura B15.

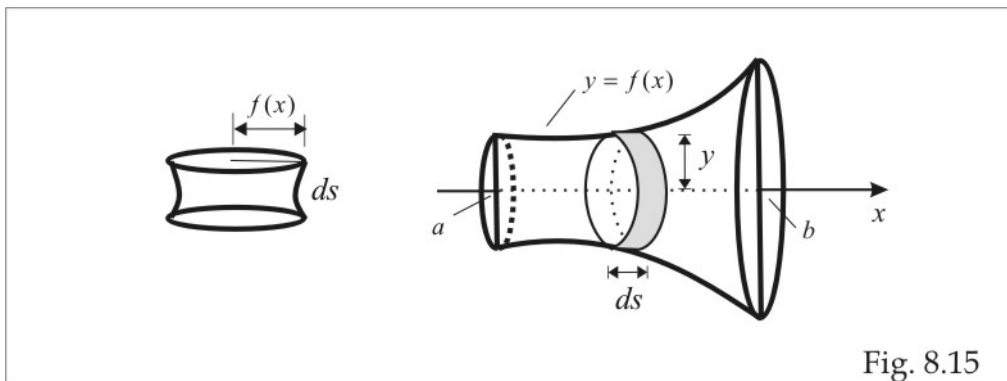


Para o cone o procedimento é análogo. Aqui usaremos a fórmula básica da área do setor circular: $A(D) = \frac{1}{2}Rs$, sendo R o raio e s o comprimento do arco, como na figura ao lado. Um cone circular reto de altura H , geratriz de comprimento g e raio da base R após cortando e aberto se identifica com o setor circular de raio g e comprimento do arco $2\pi R$, como na Figura B17 abaixo.





Em uma situação geral, supõe-se que S seja obtida por rotação em torno do eixo x , do gráfico de uma *função suave* $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Por *função suave* entende-se um função f que é contínua e tem primeira derivada contínua no intervalo $[a, b]$. A área infinitesimal dS é aproximada pela área do cilindro de raio $f(x)$ e altura ds , sendo ds o comprimento do arco sobre o gráfico de f , como sugere a Figura 8.15.



Temos que

$$dS = 2\pi f(x) ds$$

e, lembrando que $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$, encontramos por integração a seguinte fórmula para o cálculo da área de S :

$$A(S) = \int_a^b 2\pi f(x) ds = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

8.5Q Calcule a área de uma esfera de raio R . (resp. $4\pi R^2$)

8.5R Calcule a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$, em torno do eixo x . (resp. $\frac{4\pi}{3} \left[(17/4)^{3/2} - (5/4)^{3/2} \right] \simeq 30.85$)

8.5S Calcule a área do cone gerado pela rotação do segmento de reta $y = 3x + 2$, $0 \leq x \leq 3$, em torno do eixo x . (resp. $39\pi\sqrt{10}$)

8.5T A curva $8x = y^4 + 2/y^2$, $1 \leq y \leq 2$, gira em torno do eixo y . Calcule a área da superfície resultante. (resp. $1179\pi/256$)

8.5U Calcule a área do parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 4$. (resp. $\frac{4\pi}{3} \left[\left(\frac{17}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{8} \right] \simeq 36.18$)

Respostas & Sugestões

8.2B (a) $\sqrt{17} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\ln[(2 + \sqrt{5})(\sqrt{17} - 4)]$ (b) $\sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{2 + e^2 - 2\sqrt{1 + e^2}}{(3 + \sqrt{2})e^2}\right]$
 (c) $\ln[(3 + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)]$ (d) $13/12$ (e) 21 (f) $\sqrt{6}(2 + \ln 3)$ (g) $2\sqrt{3}$ (h) $\frac{680\sqrt{85}}{729} - \frac{97\sqrt{97}}{729}$ (i)
 $\frac{1}{27}(31\sqrt{31} - 13\sqrt{13})$ (j) $53/6$ (k) $\frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})$ (l) $\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{6}$

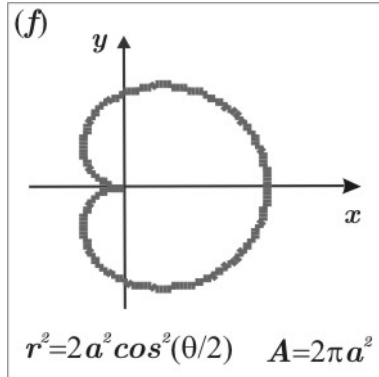
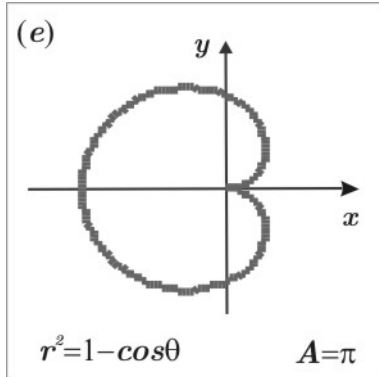
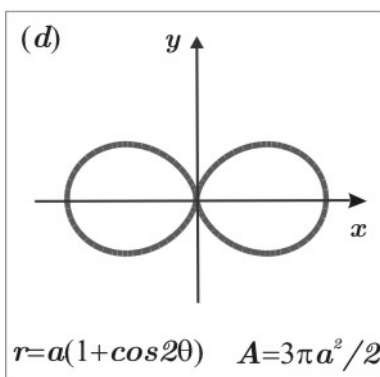
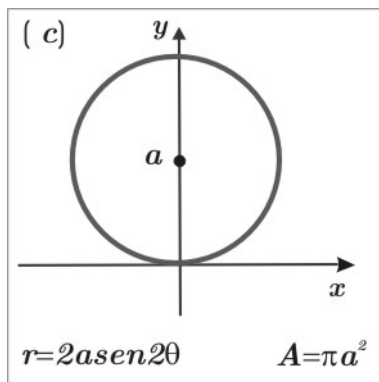
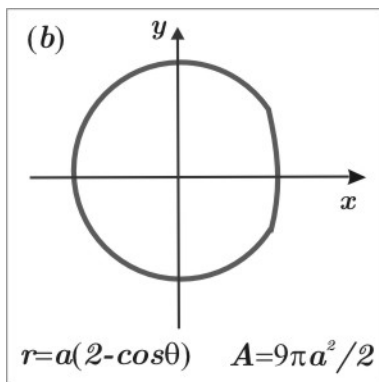
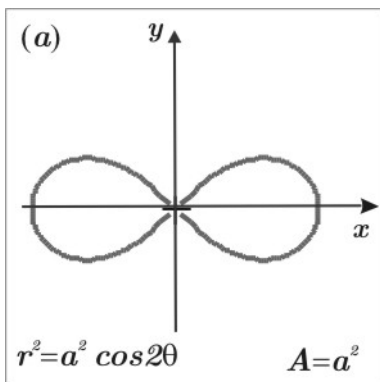
8.2H (a) $\frac{1}{27}[(85)^{3/2} - (13)^{3/2}]$ (b) $\sqrt{2}(e - 1)$ (c) 2π (d) $\frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \pi^2}$ (e) $2\sqrt{5}$ (f) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2} - 1)$

8.3B (a) $(1/\sqrt{2}, \pi/4)$ (b) $()$ (c) $(1, 3\pi/4)$ (d) $(6, \pi/3)$ (e) $(\sqrt{2}, 5\pi/4)$ (f) $()$ (g) $(2\sqrt{3}, \pi/3)$
 (h) $(4, -\pi/2)$

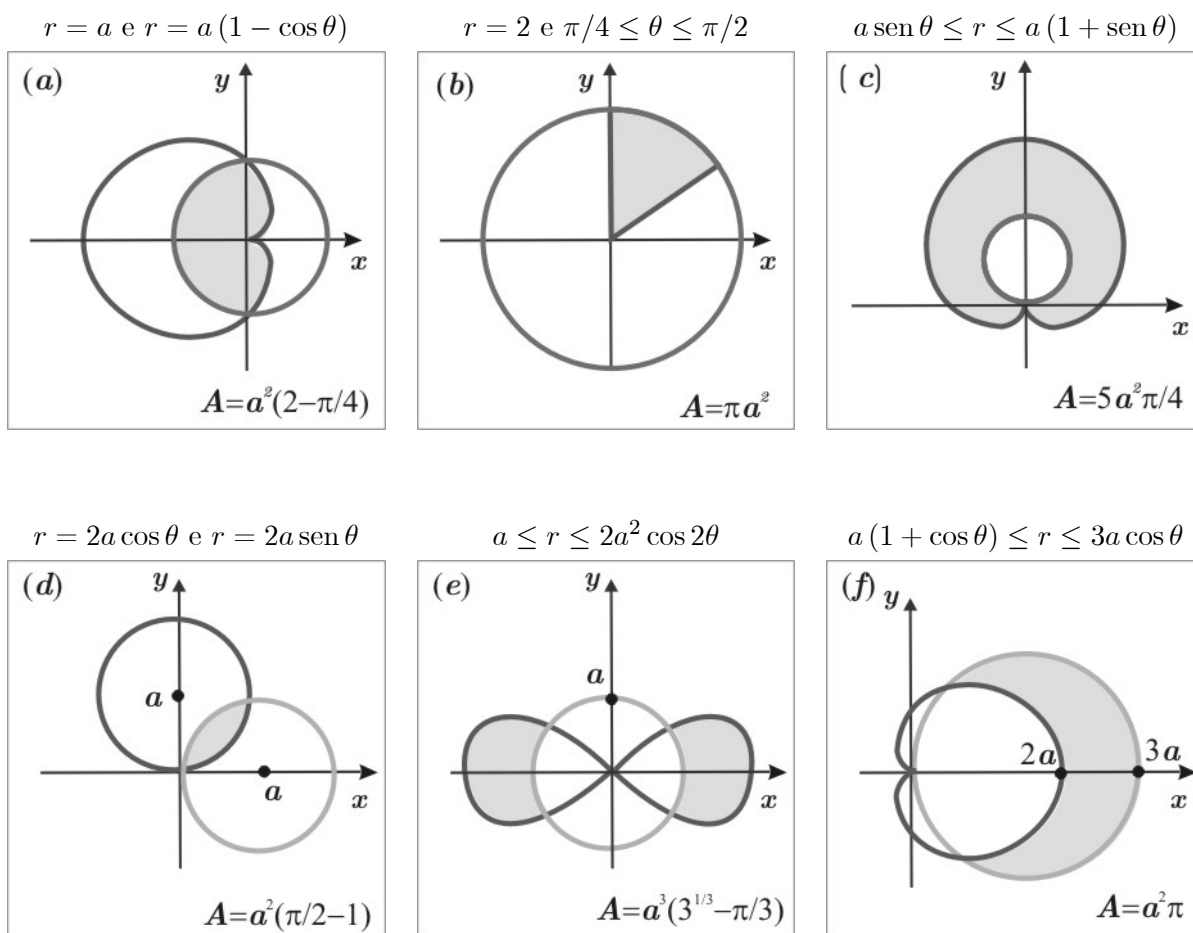
8.3H (a) $\{(2, \pi/3), (2, -\pi/3)\}$ (b) $\{(1/2, 2\pi/3), (1/2, 4\pi/3)\}$ (c) $(0, \pi/2), (0, 3\pi/2)$ (d) $\{(1 + \sqrt{2}/2, \pi/4), (1 - \sqrt{2}/2, 3\pi/4), (1 - \sqrt{2}/2, 5\pi/4), (1 + \sqrt{2}/2, 7\pi/4)\}$

8.4A (a) $3\pi/2$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{2} - 2$ (d) $\frac{\pi}{24}\sqrt{4 + \pi^2} + \frac{1}{6}\ln(\sqrt{1 + \pi^2/4} + \pi/4)$ (e) 2π (f)
 $3\sqrt{2}$ (g) $\frac{a}{24}(16 + \pi^2)^{3/2} - 8a/3$ (h) $\frac{a}{8}(2\pi - 3\sqrt{3})$ (i) $\sqrt{2}\pi/2$

8.4B



8.4C



8.5B Em cada figura abaixo apresenta-se o gráfico da região que irá produzir o sólido.

